第　四　章

音　場　に　関　す　る　諸　問　題

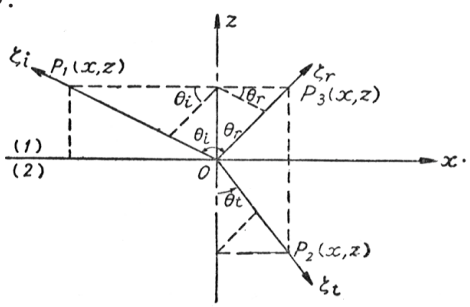
第三章までに述べた音響の理論体系は，むしろこれから述べようとする種々の具体的な問題を解くための手段として築き上げられたものである．音波に関する諸現象は音波の一般式を一境界値問題として解くことによって解明することのできる場合もあるが，多くはさらに複雑な性格を有しており，単純には取扱うことのできぬ場合が多い．ここに述べるものは，現象を抽象して単純な模型に帰着しこれを数学的に取扱うことによりかなりよく現象を理解することができる例を示している．

4・1　　反射および鏡像

4・1・1　平面波の反射および透過

3・2・4 で平面波が平板面で反射される場合を述べておいた．そこでは平面音波が斜に入射する場合に，反射角および透過角と入射角との関係が（93）で定まることを証明なしに示しておいたが，この関係は単弦振動音波の形式を用いると容易に求めることができる．

平板状境界面上の一点を座標原点 O とし，平面上に x 軸，これと垂直に z 軸をとる．平面波が xz 平面内を z 軸と θ_i なる角度で上方から O 点に入射したものとし，平面波の通路を O から音源のある方向に向って ζ_i なる座標で表わすことにする．O に入射した波束（ wave flux ）が反射して行く波面の方向を θ_r ，透過して行く方向を θ_t とし，それぞれの方向に測った Oからの距離をζ_r および ζ_t とする(第４・１図)．



第4・1図

こう定めておけば，ζ の正の方向は Oから遠去かる方向であるから，入射波は

（1）　　$\phi_i = \phi_{i0} e^{-ik_1\zeta_i - i\omega t}$,

反射波および透過波はそれぞれ

（2）　　$\phi_r = \phi_{r0} e^{ik_1\zeta_r - i\omega t}$,

（3）　　$\phi_t = \phi_{t0} e^{ik_2\zeta_t - i\omega t}$

と表わすことができる．しかるに ζ_i上の一点 P_1を取り，長さ $\overrightarrow{OP_1} = \zeta_i$ を P 点の座標 zと xで表わすと

(4)　$$\zeta_i = -x\sin\theta_i + z\cos\theta_i ,$$

同様に ζ_r と ζ_t は

(5)　$$\zeta_r = x\sin\theta_r + z\cos\theta_r ,$$

(6)　$$\zeta_t = x\sin\theta_t - z\cos\theta_t$$

となる．一方境界面の両側では粒子速度の z 成分および音圧がそれぞれ連続でなければならぬ．粒子速度の z 成分は

(7)　$$\dot{\xi}_{iz} = -\frac{\partial\phi_i}{\partial z} = +k_1\cos\theta_i\cdot\phi_i ,$$

(8)　$$\dot{\xi}_{rz} = -\frac{\partial\phi_r}{\partial z} = -k_1\cos\theta_r\cdot\phi_r ,$$

(9)　$$\dot{\xi}_{tz} = -\frac{\partial\phi_t}{\partial z} = +k_2\cos\theta_t\cdot\phi_t .$$

音圧は

(10)　$$\delta p_i = \rho_{01}\frac{\partial\phi_i}{\partial t} = -i\omega\rho_{01}\phi_i ,$$

(11)　$$\delta p_r = \rho_{01}\frac{\partial\phi_r}{\partial t} = -i\omega\rho_{01}\phi_r ,$$

(12)　$$\delta p_t = \rho_{02}\frac{\partial\phi_t}{\partial t} = -i\omega\rho_{02}\phi_t ,$$

よって境界面上（$z=0$）にて面の両側の $\dot{\xi}_z$ および δp が相等しいとおけば

(13)　$$k_1\cos\theta_i\cdot\phi_{i0}\cdot e^{ik_1x\sin\theta i} - k_1\cos\theta_r\cdot\phi_{r0}\cdot e^{ik_1x\sin\theta_r} = k_2\cos\theta_t\cdot\phi_{t0}\cdot e^{ik_2x\sin\theta_t} ,$$

(14)　$$\rho_{01}\phi_{i0}e^{ik_1x\sin\theta_i} + \rho_{01}\phi_{r0}e^{ik_1x\sin\theta_r} = \rho_{02}\phi_{t0}\cdot e^{ik_2x\sin\theta_t} .$$

(13)（14）がすべての x に対し（境界面上のすべての点で）成立するためには，まず

(15)　$$e^{ik_1x\sin\theta_i} = e^{ik_1x\sin\theta_r} = e^{ik_2x\sin\theta_t}$$

が成立することを必要とし，これより

(16)　$$k_1\sin\theta_i = k_1\sin\theta_r = k_2\sin\theta_t$$

なる条件が存在せねばならぬ．よって 3・2・4 の（93）が成立することが証明される．(15) が成立した後に

(17)　$$k_1\cos\theta_i\cdot\phi_{i0} - k_1\cos\theta_r\cdot\phi_{r0} = k_2\cos\theta_t\cdot\phi_{t0} ,$$

(18)　$$\rho_{01}\phi_{i0} + \rho_{01}\phi_{r0} = \rho_{02}\phi_{t0}$$

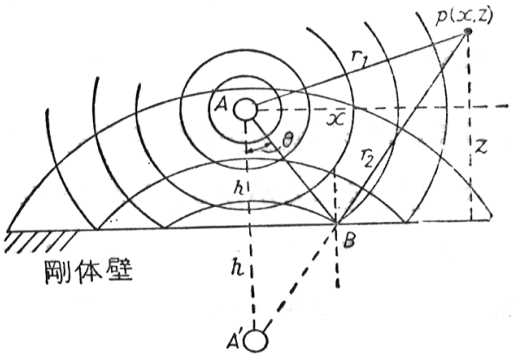
が成立せねばならぬことから ϕ に対する透過係数と反射係数は3・2・4の場合と同様に求められる．

この結果は，音源が境界平面の法線と θ_i なる角をなす方向の遠方に存在する場合に，この面上に入射した音波はやはり面の法線と θ_i なる角をなして反射されることが示され，その反射係数は3・2・4

で与えられる．しかし音源が有限の距離の位置にあったらどうであろう．たとえば水面の上方 h なる高さの位置にある点音源から対称球面波が発射された場合に，水面上の音場はどうなっているであろうか．

4・1・2　対称球面波の完全反射，鏡像の原理

空気と水との境界面における反射はほとんど完全反射をすることが知られている．[1] このような場合の例として剛体壁の平面を仮想し，それから h だけ離れた点に呼吸球がある時の音場を計算してみよう．第4・2図のように音源の位置を A とし，空間内の一点を P とする．境界面がなければ A から発した音波による P 点の速度ポテンシャルは，AP 間の距離を r_1 とすれば



第4・2図

(19)　$$\phi_1 = \frac{A}{4\pi r_1} e^{ikr_1}$$

である．ここに $A = A_0 e^{-i\omega t}$ は点音源の強さである．

境界面が存在すると，面上で反射された波面の中に P 点を通る部分が生ずる．その波面は，反射角が入射角と等しいことから，音源 A の像 A' の位置から発射されたかの[illegible]な状態で P 点を通過することになる．ここに A の像[2] とは，A から境界面に下した垂線の足を O' とするとき，AO の延長上に $OA' = OA$ となるように A' を取り，ここに A にあるのと等しい強さの $A_0 e^{-i\omega t}$ なる点音源があるものと仮想することをいう．これはあたかも境界面を鏡とし A を光源と考えた場合に A' に虚像が生ずるのと似ている．さらに剛壁における反射の場合には反射波のエネルギーは入射波のそれと等しく，また反射音波の速度ポテンシャルも符号を変じないことが知られているから，P 点を通る反射波の波面は，$A'P$ を r_2 と書くとき

(20)　$$\phi_2 = \frac{A}{4\pi r_2} e^{ikr_2}$$

と表わされる．ここに r_2 は A から θ 方向に発射された波面が B 点で反射されて P に至る長さに相当し，この結果はあたかも境界面が消滅して一様に煤質で満たされた空間内の A' 点に音源がある場合の音場の形と一致する．

壁のある場合の P 点の音場は，結局，壁を取り去ったと仮定した場合の A にある $A_0 e^{-i\omega t}$ なる点音源と A' 点にある $A_0 e^{-i\omega t}$ なる点音源からの合成音場と考えられ

(21)　$$\phi = \frac{Ae^{+ikr_1}}{4\pi r_1} + \frac{Ae^{+ikr_2}}{4\pi r_2}$$

と表わされる．(21) をさらに簡単な形とするために

---

(1)　3・2・4参照．
(2)　image

(22)　$r_1 + r_2 = 2r$,

(23)　$r_2 - r_1 = 2s$

とおくと

(24)　$$4\pi\phi = Ae^{+ikr}\left[\left(\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_1}\right)\cos ks - i\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\sin ks\right]$$

となり，音源から遠くはなれた点では $r_1 \approx r_2$ であるから第一項に比して第二項は無視し得る．しかも第一項は音源の高さ~~が~~ h が波長に比べて小さな場合には，$ks \ll 1$ であるから

(25)　$$4\pi\phi \approx 2A\frac{e^{+ikr}}{r}$$

と書ける．よって音源が剛壁に近く存在する場合の音源から遠方に生ずる音場は，壁のない場合の２倍となっていることが分かる．しかし一方，実際の音波は壁の一方の側にのみ発生するのであるから音源の振動を持続させるためのエネルギー供給量も壁のない場合に比較して２倍を必要とする．

音の強さはエネルギー流密度で与えられるから（24）の右辺の実数部の平方に比例する．その値は

(26)　$$A_0^2\left\{\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{2}{r_1 r_2}\cos k\left(r_2 - r_1\right)\right\}$$

であって，その大きさは

$$A_0^2\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)^2 \quad と \quad A_0^2\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)^2$$

との間の値となる．もしも音源の高さ h が波長 λ に比して小さくない場合には $k(r_2 - r_1)$ は無視できぬ程度の大きさとなるから，音の強さは $(r_2 - r_1)$ にしたがって変化し，

(27)　$$\cos k(r_2 - r_1) = +1, \quad すなわち \quad r_2 - r_1 = \frac{2n\pi}{k} = n\lambda, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

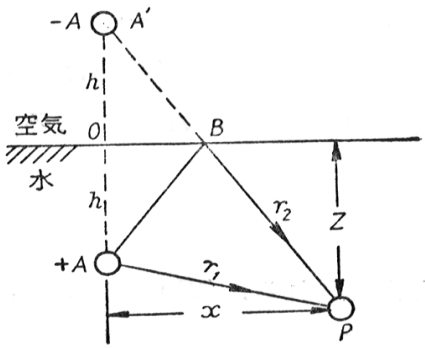
となる位置で音の強さは極大となり，また

(28)　$$\cos k(r_2 - r_1) = -1, \quad すなわち \quad r_2 - r_1 = \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)2\pi}{k} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\lambda, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

となる位置で極小となる．これは光における FRESNEL の干渉と同じ現象である．

水中に音源がある場合の水面における反射を扱う場合にも全く同様のことがいえる。ただこの場合に，反射面は剛壁ではなくて圧縮が生じない完全反射面であるために反射波の位相は反転する．このことを表わすために $+A_0 e^{+i\omega t}$ なる音源に対して $-A_0 e^{-i\omega t}$ なる鏡像を仮定する．よって水中の任意の点の音場は

(29)　$$4\pi\phi = \frac{Ae^{+ikr_1}}{r_1} - \frac{Ae^{+ikr_2}}{r_2}$$



第4・3図

と表わされる．この ϕ は境界面 $(z=0)$ 上では音圧が

(30)
$$p = p_0 + \rho\frac{\partial\phi}{\partial t} = p_0$$

となり，境界条件 $\delta p = 0$ を満足する．(29) を変形し

(31)
$$4\pi\phi = Ae^{+ikr}\left\{\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\cos ks - i\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)\sin ks\right\}$$

と書くと，音の強さは

(32)
$$A_0^2\left\{\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}-\frac{1}{r_1 r_2}\cos k(r_2-r_1)\right\}$$

に比例する．

観測点の深さを z_1 ，音源からの水平距離を x とし，音源の深さが波長に比べて深い場合 $(kh>1)$ について音の強さの極小点を求めてみよう．音源から遠方で x が z や h に比して充分に大きな場合には

(33)
$$r_1 = x + \frac{(z-h)^2}{2x}\ ,\qquad r_2 = x + \frac{(z+h)^2}{2x}$$

とおくことができるので

(34)
$$k(r_2-r_1) = \frac{2kh}{x}z = \frac{4\pi h}{x}\frac{z}{\lambda}$$

と書ける．よって音の極小となる点は

(35)
$$\cos k(r_2-r_1) = +1\ ,\qquad k(r_2-r_1) = 0\ ,2\pi\ ,4\pi\ ,\cdots 2n\pi\ ,\cdots\ ,$$

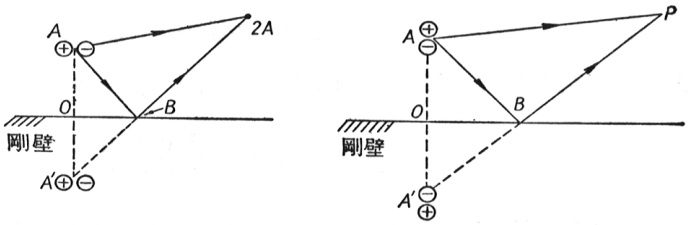
または

(36)
$$\frac{4\pi h}{x}\cdot\frac{z}{\lambda} = 2n\pi\ ,$$
$$z = \frac{x}{h}\frac{n\lambda}{2}\qquad (n=0,1,2,3,\cdots)$$

の深さの位置である．よって水面および水面から半波長毎の深さで音は最も弱くなる．音の最強の位置はその中間に存在することは勿論である．

4・1・3　二重音源より輻射される音波の完全反射

境界面の近くに二重音源を置く場合には点音源の場合と全く同様の取扱法で音場が計算できるが，その結論を示すと，剛壁の近くに二重音源をその軸を壁と平行に置く場合には，遠方の音場は2個の二重音源を合成した場合と同等になるが，その軸を壁と垂直に置



(a)　二重音源軸が壁と平行の場合．

(b)　二重音源の軸が壁と垂直の場合．

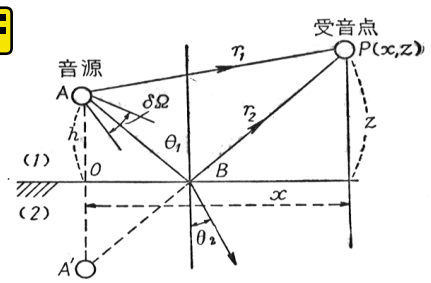
第4・4図

く場合には遠方の音場は零となる(第4・4図).

4・1・4　平坦な境界面上の輻射音場

2種類の媒質 (1) と (2) が平面で相接している場合に，その一方の媒質 (1) 内の境界面の近傍に音源を置いた場合の煤質 (1) 内の音場は，音源からの直接音と境界面からの反射音とより合成された干渉音場となることが予想される.

境界面から測って高さ $h(m)$ の位置にある音源から対称球面波が輻射されているものとし，かつ音の波長に対して境界面の凹凸が無視されるものとすれば，音源から微小な立体角 $\delta\Omega$ 内に輻射され，境界面に向ってその法線と θ_1 なる角の傾きをもって入射した音波は，一部が整反射されて上方に向いまた一部は境界を透過して下方に侵入すると考えられる. この場合に $\delta\Omega$ なる立体角内の音波の反射係数や透過係数はなる角度で入射する平面波の係数と余り相異はないものと考えてよいであろう.



第4・5図

境界面の上部の煤質に関する定数を (1)，下部の媒質のそれを (2) で示すことにすると，速度ポテンシャルの透過係数 T および反射係数 R は

(37)
$$T = \frac{2}{\dfrac{\rho_0^{(2)}}{\rho_0^{(1)}} + \dfrac{k^{(2)}\cos\theta_2}{k^{(1)}\cos\theta_1}}, \qquad R = \frac{\dfrac{\rho_0^{(2)}}{\rho_0^{(1)}} - \dfrac{k^{(2)}\cos\theta_2}{k^{(1)}\cos\theta_1}}{\dfrac{\rho_0^{(1)}}{\rho_0^{(1)}} + \dfrac{k^{(2)}\cos\theta_2}{k^{(1)}\cos\theta_1}},$$

ただし

$$k^{(j)} = \frac{\omega}{c^{(j)}}\sqrt{1 + i\frac{\sigma^{(j)}}{\omega}} = \alpha^{(i)} + i\beta^{(j)}, \qquad c^{(j)} = \frac{\kappa^{(j)}}{\rho_0^{(j)}}$$

$$\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} = \frac{k^{(1)}}{k^{(2)}},$$

σ は媒質の抵抗係数，

θ_1 は入射角および反射角，

θ_2 は透過角

$j = 1, 2,$

で与えられるから，入射点における入射音波の速度ポテンシャルを $\phi_0^{(i)}$，反射波および透過波のそれをそれぞれ $\phi_0^{(r)}$ および $\phi_0^{(t)}$ と書けば

(38)
$$\phi_0^{(r)} = R\phi_0^{(i)}, \qquad \phi_0^{(t)} = T\phi_0^{(i)}$$

である. 煤質 (1) が大気で (2) が地面とか雪とか気体以外の物質であれば

(39)
$$\frac{\rho_0^{(2)}}{\rho_0^{(1)}} >> \frac{k^{(2)}\cos\theta_2}{k^{(1)}\cos\theta_1}$$

が成立すると考えられるので，抵抗係数 σ の著しく大きくない限り

(1)　3・6参照.

(40)　$R \approx +1$

とみなして差支えない．

音源 A から境界面に沿うて水平距離 x(m) だけ離れた点で高さ z(m) の位置 P に受音器をおくとき，音波と受音点との直線距離を r_1(m)，音源の境界面に関する鏡像 A' と受音点との直線距離を r_2，境界面と r_2 との交点 B の反射係数を R とすれば，受音一点の音場は

(41)
$$\phi(R) = \frac{A}{4\pi}\left(\frac{e^{ik^{(1)}r_1}}{r_1} + R\frac{e^{ik^{(1)}r_2}}{r_2}\right)$$

で計算される．これを

(42)
$$r_2 + r_1 = 2r\,,\quad r_2 - r_1 = 2s\,,\quad R = |R|e^{i\eta}\,,\quad A = |A|e^{i\varphi - i\omega t}$$

とおいて変形すると，

(43)
$$\phi = \frac{|A_0|}{4\pi}\frac{1}{x}\left(1 - \frac{z^2+h^2}{2x^2}\right)\sqrt{1+|R|^2+2|R|\cos(2ks+\eta)}\cdot e^{i\left(kr+\frac{\eta}{2}-n+\varphi-\omega t\right)}$$

ここに

$$\tan u = \frac{r_2 - |R|r_1}{r_2 + |R|r_2}\cdot\tan\left(ks + \frac{\eta}{2}\right).$$

さらに ϕ の振幅のみを取り出して簡単な形にすれば

(44)
$$|\phi| = \frac{|A_0|}{4\pi}\frac{1}{x}\left(1 - \frac{z^2+h^2}{2x^2}\right)\sqrt{1+|R|^2+2|R|\cos\left(\frac{4\pi hz}{\lambda x}+\eta\right)}\cdot e^{-\beta^{(1)}x\left(1+\frac{z^2+h^2}{2x^2}\right)},$$

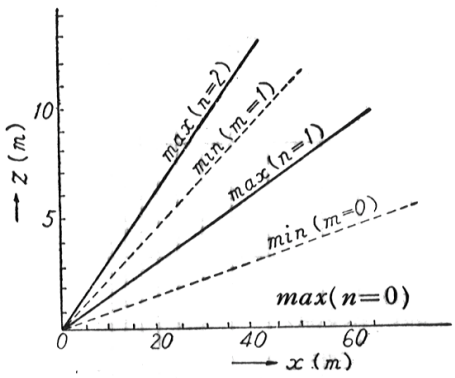
ただし

$$\lambda = \frac{2\pi}{\alpha^{(1)}}\qquad(\mathrm{m})$$

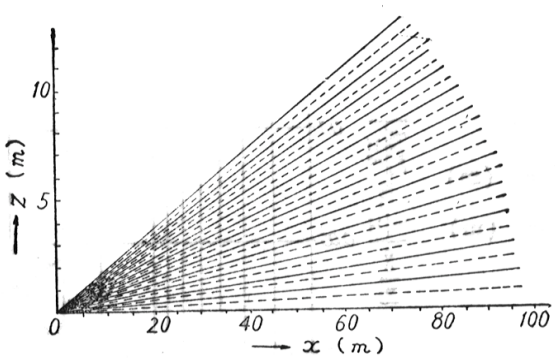
となり，$|\phi|$ の極大値は

(45)
$$\frac{z}{x} = \frac{\lambda}{2h}\left(n - \frac{\eta}{2\pi}\right),\qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

の位置に生じ，その値は



(a)　$h = 1$(m)，$\lambda = 0.3$(m)，$\frac{\lambda}{h} = 0.3$.



(b)　$h = 1$(m)，$\lambda = 0.03$(m)，$\frac{\lambda}{h} = 0.03$.

第4・6図　$|\phi|$ の極大および極小位置．　$|R| = 1$，$\eta = 0$ の場合．

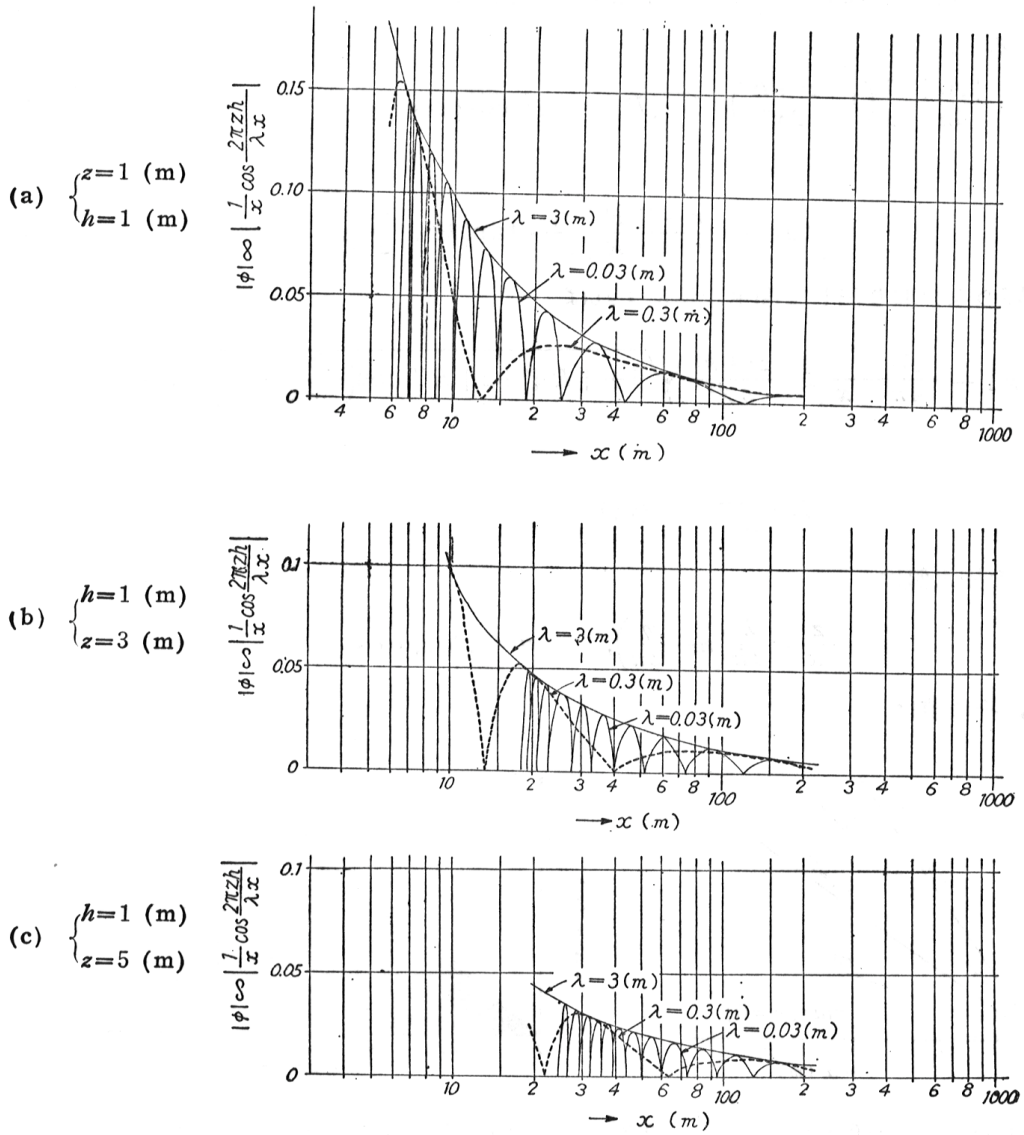
(46)
$$\left|\phi_{\max}\right| = \frac{\left|A_0\right|}{4\pi}\,\frac{1}{x}\left(1-\frac{z^2+h^2}{2x^2}\right)(1+\left|R\right|)\cdot e^{-\beta^{(1)}x\left(1+\frac{z^2+h^2}{2x^2}\right)},$$

$\left|\phi\right|$が極小となる位置および極小値は

(47)
$$\frac{z}{x} = \frac{\lambda}{4h}\left(2m+1-\frac{\eta}{\pi}\right), \qquad m = 0, 1, 2, \cdots,$$

(48)
$$\left|\phi_{\min}\right| = \frac{\left|A_0\right|}{4\pi}\,\frac{1}{x}\left(1-\frac{z^2+h^2}{2x^2}\right)(1-\left|R\right|)\cdot e^{-\beta^{(1)}x\left(1+\frac{z^2+h^2}{2x^2}\right)}.$$

これを見ると，$\left|\phi\right|$ の極値の生ずる位置は原点を通り境界面と $\tan^{-1}(z/x)$ なる傾きをなす円錐面上であり，極大と極小は交互に配列され，その傾きは $\dfrac{\lambda}{h}$ が小さな程水平に近いものが現れるようになる．なお h または z の内の一方または両方が0となる場合には，(44) より明らかなように，干



第4・7図　$\left|\phi\right| \backsim \dfrac{1}{x}\sqrt{1+\cos\dfrac{4\pi hz}{\lambda x}} = \dfrac{1}{x}\cos\dfrac{2\pi hz}{\lambda x}$

渉音場は現われずに

(49)　$$|\phi| \propto \frac{1}{x} e^{-\beta^{(1)} x}$$

の形となる.

音源の高さを 1(m) に保ち (40) の仮定の下に受音位置を変化させて (44) を計算すると第4・6図および第4・7図のような曲線群を得る. これを見ると, 波長が短かい場合には非常に細かい干渉縞の現われることが知られ, また波長の長いときはほとんど (49) に従うことが知られる. また同一の波長の場合には音源の近くほど細かい縞が現われ, ある距離より遠方では (49) の形となることが知られる.

音源が境界面と平行な軸を有する二重音源である場合には, 音場の形は

(50)　$$\phi = \frac{-ik}{4\pi} B \left[\frac{\cos\theta_1}{r_1} e^{ikr_1} + R \frac{\cos\theta_2}{r_2} e^{ikr_2} \right],$$

$$B = |B_0| e^{-i\omega t + i\varphi} \cdots \text{ 二重音源の強さ,}$$

θ_1 および θ_2 はそれぞれ r_1 および r_2 と二重音源の軸とのなす角度である. 二重音源の軸が境界面と平行な場合に, 音源から遠くはなれて x が h や z に比して大きくなる位置の音場は

(51)　$$|\phi| \approx \frac{|B_0|}{\sqrt{2}\lambda x} \sqrt{1 + |R|^2 + 2|R| \cdot \cos\left(\frac{4\pi hz}{\lambda x} + \eta \right)} \,.\, e^{-\beta x}$$

で与えられ, 対称球面波音源による音場の大略 $\frac{1}{\lambda}$ となる.

音の強さは (44) および (51) から $|\phi^2|$ を計算することによって定められることは勿論である. 第4・1表に (46) および (48) の計算に用いる $(1+R)$ および $(1-R)$ の表を示しておく.

第4・1表

R	$(1+R)$	$(1-R)$	R	$(1+R)$	$(1-R)$
1	2	0	0.4	1.4	0.6
0.9	1.9	0.1	0.3	1.3	0.7
0.8	1.8	0.2	0.2	1.2	0.8
0.7	1.7	0.3	0.1	1.1	0.9
0.6	1.6	0.4	0	1.0	1.0
0.5	1.5	0.5			

4・2　固体の振動によって生ずる音場

流体と見なし得る媒質内で剛体と見なし得る固体が微小な往復運動をする場合には, 固体の振動によって生ずる流体の擾乱は固体を取り囲む流体内を伝播し, 広い範囲に波及する. 空気中で振動する発音体から輻射される音波も, これと類似の現象であると考えることができよう. この種類の問題を解くための最も単純な模型の一つは流体中で一定の方向に振動する固体球の周囲の波動であり, 固体

球の一方向への振動と二重音源の概念とを利用することによって比較的簡単に音場の有様が理解できる.振動体と周囲の流体との境界面の有様を理解するための手順としてまず非圧縮性流体内の固体球の振動から述べる.

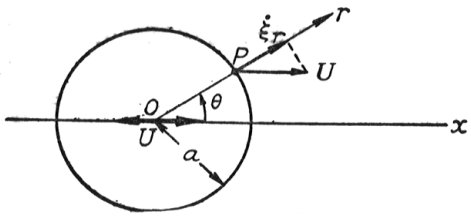
4・2・1　非圧縮性流体内の固体球の振動

液体はいうにおよばず,空気のような気体でも,その中で振動する固体の振動数が余り大きくない範囲では非圧縮性流体と見なすことができるし,また振動数が比較的大きくなっても振動体の近傍(波長と比較して近距離の範囲)では非圧縮性流体の仮定が成立する.[1]

非圧縮性流体内で振動する球によって生ずる擾乱を計算するために,座標原点 O を球の静止位置の中心に取り，球座標 (r, θ, φ) を採用し，球が振動する方向を x 軸とし，θは x 軸から測った角とする.球の半径を a とし球の x 方向の振動速度を U と記すと,球面上の (a, θ) なる点 P の速度の r 成分 $\dot{\xi}_r$ は

$$U\cos\theta \qquad (\mathrm{m/s})$$

である．流体は固体表面と常に密着していると考えられるから流体の球面上の速度の r成分は



第4・8図

（1）
$$-\left.\frac{\partial\phi}{\partial r}\right]_{r=a} = U\cos\theta = \dot{\xi}_r \qquad (\mathrm{m/s})$$

と見なすことができる.

一方無限に拡がっている非圧縮性流体内の原点O に x 軸を軸とする二重振源のある場合の流体内の速度ポテンシャルは

（2）
$$\phi = \frac{B}{4\pi r^2}\cos\theta$$

であるから，x方向に振動する球の代りに原点に

（3）
$$B = 2\pi a^3 U$$

なる強さの二重振源があると考えれば，この場の粒子速度は球面上で (1) と等しくなる．よって振動する球から輻射される場を計算する代りに,球を取り去ってその中心に (3) なる強さの二重振源を置いた場合の場を計算すればよい．その場は (2) と (3) より

（4）
$$\phi = \frac{Ua^3}{2r^2}\cos\theta$$

となる．この ϕは非圧縮性流体（擾乱の伝播速度が無限大）と見なし得る範囲で振動速度 U によって生ずる速度ポテンシャルである.ここには Uが微小であるという制限はない.

流体内の各部分が運動する方向は,各点の速度の方向を計算すれば求められる.各点についてこれ

（1）　非圧縮性流体については 3・4参照.

を求めると流動線[2]が描かれる.いま微小振動の場合を考えて,流体内の一点の粒子が流動線に沿って微小な変位をしたと仮定する.その変位の径方向および横方向の成分をそれぞれδr および$r\delta\theta$ とすれば,この値はその点の速度のそれぞれの方向の成分, $-\dfrac{\partial\phi}{\partial r}$ および $\dfrac{\partial\phi}{r\partial\theta}$ に比例していると考えられる.よって

（5）
$$\frac{\delta r}{\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial r}\right)}=\frac{r\delta\theta}{\left(\dfrac{\partial\phi}{r\partial\theta}\right)},$$

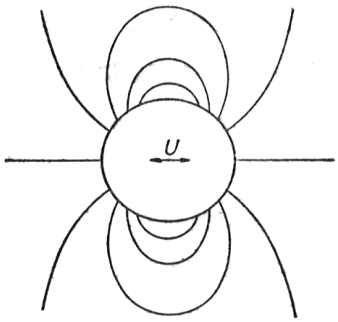
または形を変えて

（6）
$$\frac{\delta r}{\cos\theta}=\frac{r\delta\theta}{\dfrac{1}{2}\sin\theta}.$$

これを積分すると流動線を表わす方程式として

（7）
$$r^2=b^2\sin\theta$$

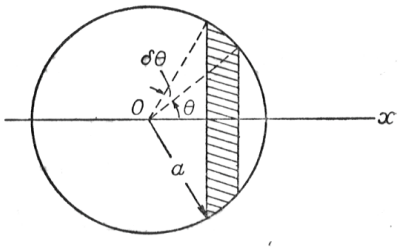
を得る.ここに b^2 は各流動線に固有のパラメータである. b の値を色々に変えて (7) を描くと第4・9図のようになる.



第4・9図　流動線.

流体内で球を振動させようとすると流体が球の運動を妨げようとする反作用を呈するために,周囲に流体のない場合より多くの力を必要とする.[3] この流体の反作用がどのようなものであるかを調べるために,運動する球面上に流体がおよぼす力の x 成分 X'を求めてみる.球面上の流体の圧力を p とし, θ なる角度の位置の $\delta\theta$なる幅の球帯の面積が $2\pi a^2\sin\theta\cdot d\theta$ なることに注意すれば, 球に作用する圧力の x 成分は

（8）
$$X'=-\int_0^{\pi}p\cos\theta\cdot 2\pi a^2\sin\theta\cdot d\theta \qquad \text{(N)}$$



第4・10図

となる.ここに xの正の側の圧力は $-x$方向を向いているので負号がついている.圧力の不変部分はここで問題とする必要はなく,変化する部分に対しては

（9）
$$p=\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}=\frac{1}{2}\rho a\frac{dU}{dt}\cos\theta \qquad \text{(Pa)}$$

と表わされるから, (8) は

(10)
$$X'=-\frac{2}{3}\pi\rho a^3\frac{dU}{dt} \qquad \text{(N)}$$

となる.これが振動する球におよぼす流体の反作用である.力の大きさが速度には関係せず加速度にのみ比例することは注意すべき点である.

（2）　line of motion
（3）　固体を水中で運動させようとすると空気中における場合よりも抵抗を感ずるのは水の反作用による.

球の質量を M とし，これを振動させるために加える力を X とすると，力の平衡は

(11)　$$M\frac{dU}{\partial t} = X + X' \qquad (\mathrm{N})$$

で表わされる．これに (10) を用いて変形すると

(12)　$$\left(M + \frac{2}{3}\pi a^3\rho\right)\frac{dU}{dt} = X \qquad (\mathrm{N})$$

となる．この結果は流体中における球の見かけの質量が $\frac{2}{3}\pi a^3\rho$ だけ増したかのように見えることを示している．すなわち周囲の流体を取り除いて $\left(M + \frac{2}{3}\pi a^3\rho\right)$ なる質量の球を励振する場合と等しい大きさの外力を必要とすることが示されている．ここに $\frac{2}{3}\pi a^3\rho$ は球の占めている空間に流体を満した場合の質量~~芸~~ $\frac{4}{3}\pi a^3\rho$ の半分であり，これを附加質量[4] と呼ぶ．以上の結果は微小振動の制限を除去しても成立することが STOKES (1843) によって示されている．

見かけの質量増加すなわち附加質量の大きさは球以外の形状の場合には異なる値をとる．この量は振動体の大きさ形および振動方向等によって異なるが，その一部または大部分が周囲の流体の存在することに基因する．この現象は音響輻射器の動作を理解するために重要なものである．

4・2・2　球の振動によって生ずる音場

半径 a なる球が x方向に

(13)　$$U = U_0 e^{-i\omega t} \qquad (\mathrm{m/s})$$

なる速度で振動する場合に，その周囲に生ずる音場を求める．球の表面における条件は 4・2・1 の場合と同様と考えられる．球の中心を原点とするとき，原点に二重音源 $Be^{-i\omega t}$ がある場合の音場は，3・5・4 の (59) より

(14)　$$\phi = -\frac{B}{4\pi}e^{-i\omega t}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\cos\theta = \frac{B\cos\theta}{4\pi r}\left(\frac{1}{r} - ik\right)e^{ikr - i\omega t}$$

で与えられ，また (13) の U と (14) の ϕとの間には (1) の関係が成立する．よって

(15)　$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial r}\right]_{r=a} = \frac{B\cos\theta}{4\pi a^3}e^{ika}\left\{(k^2a^2 - 2) + i2ka\right\} = -U_0\cos\theta$$

より仮想二重音源の強さ B が U で表わされ

(16)　$$B = \frac{-\cancel{A}\pi a^3 U_0 e^{-ika}}{(k^2a^2 - 2) + i2ka}$$

となる．

球の寸法が波長に比して小さな場合には $ka << 1$ であるから (16) は (3) と一致する．小さな球の近くの音場はさらに (14) にて $kr << 1$ と見なすことができるので (14) は (2) と等しくなる．ただし (3) の代りに

(4)　additional mass

(17)　$$B = 2\pi a^3 U_0$$

と置くことが必要である．この結果より見ると，小さな球が振動する場合の球の近くの流体の動きは4･2･1で示した結果と類似のものであり，流動線は第4・9図に示した形に近い形であり，附加質量も $\frac{2}{3}\pi a^3 \rho$ と見なすことができる．

小さな球から遠く離れた点の音場は，$kr >> 1$ として(14)より求めることができ

(18)　$$\phi = \frac{-i}{2} k a^3 U_0 \cos\theta \cdot \frac{e^{ikr}}{r}$$

となる．これの実数部をとれば，球の振動が

(19)　$$U = U_0 \cos\omega t \qquad (\mathrm{m/s})$$

なる場合に対応する音場として

(20)　$$\phi = +\frac{1}{2}\frac{k a^3 U_0 \cos\theta}{r} \sin(kr - \omega t)$$

を得る．よって遠方の音場は，近くの音場が $\frac{1}{r^2}$ に比例して減衰するのに対し，$\frac{1}{r}$ に比例して減衰する．

流体にはマサツや粘性による抵抗はないものと仮定しているが，球が振動して波動を発生し，それが拡散しながら伝播してゆくためには，球面からエネルギー流が輻射されねばならぬ．抵抗に消費される仕事量を計算するには(14)を用いて正確な計算を行わねばならぬが，輻射エネルギー流を求めるには（17）と3・5・4の（59）とを用いて計算することができ，その時間平均値は

(21)　$$\overline{W} = \frac{\pi}{6}\rho c k^4 a^6 U_0^2 \qquad (\mathrm{W})$$

となる．

いま球の平均の密度を ρ' とし，この球がたとえばバネのようなものに結ばれて振動していると仮定すると，その糸の全エネルギーは

(22)　$$\overline{E} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi a^3 \rho' \cdot U_0^2 \qquad (\mathrm{J})$$

である．このエネルギーの減少する割合が輻射工ネルギー流 $\overline{W}$ に等しいと考えると，

(23)　$$-\frac{\partial \overline{E}}{\partial t} = \overline{W} \qquad (\mathrm{W})$$

とかけるが，これに（21）と（22）を代入すると

(24)　$$\frac{dU_0}{dt} + \frac{U_0}{\tau} = 0, \qquad U_0 = A_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (\mathrm{m/s}),$$

ただし

(25)　$$\tau = \frac{8}{\omega (ka)^3}\frac{\rho'}{\rho} \qquad (\mathrm{s})$$

となり，速度振幅 U_0 の減衰率 τ と周期との比 $\dfrac{\omega\tau}{2\pi}$ は非常に大きい値となるのが普通である．よって小さな球の自由振動はエネルギー輻射によって余り制動されない場合が多い．

4・2・3　媒質に交番力が局部的に集中して作用する場合に輻射される音場

任意の形状の固体が流体内で振動する場合の音場は球の場合と全く同様に取り扱われるが，そこには多少の直感的な考察を必要とする．しかし流体内の一点に交番力が集中して作用した場合に生ずる音場に関する定理を用いると，この種の問題が比較的簡単に解ける．

流体内の一点を囲む微小な球形の領域（半径 a ）に外力 $Fe^{-i\omega t}$ が作用し，この領域を x方向に振動させたとすると，前節の問題と同様の考え方により，二重音源による音場で置きかえられる．この場合に媒質流体の密度を ρ とすると，球形領域の質量は $\dfrac{4}{3}\pi a^3\rho$ でありその附加質量は $\dfrac{2}{3}\pi a^3\rho$ であるから，球の振動速度を

(26)　$$U = U_0 e^{-i\omega t} \qquad (\mathrm{m/s})$$

とすれば，(12) より外力 F と速度振幅 U_0 との関係として

(27)　$$F = -i2\pi\rho c k a^3 U_0 \qquad (\mathrm{N})$$

を得る．よって振動源から遠方における流体内の音場は

(28)　$$\phi = \frac{F\cos\theta}{4\pi\rho c}\cdot\frac{e^{ikr}}{r} \qquad (kr >> 1)$$

となる．これと3・5の（61）とを比較すると仮想二重音源の強さは

(29)　$$B = \frac{iFe^{-i\omega t}}{\rho c k} = \frac{i}{\rho\omega}Fe^{-i\omega t},$$

または実数部をとって

(30)　$$B = \frac{F}{\rho c k}\sin\omega t = \frac{F}{\rho\omega}\sin\omega t$$

となる．またこの音~~猿~~から輻射されるエネルギー流は

(31)　$$\overline{W} = \frac{k^2F^2}{24\pi\rho c} = \frac{\omega^2F^2}{24\pi\rho c^3} \qquad (\mathrm{W})$$

である．これは $F\sin\omega t$ なる外力によって流体に注ぎ込まれる仕事の速度を表わす．よってこの振動源から輻射されるエネルギー流は，媒質が一定の場合には ω^2 に比例して増加し，また同一の振動数の場合には，

(32)　$$\rho = \kappa c^2$$

なることより，c^5 に反比例して小さくなる．

4・2・4　任意の形の固体の振動によって生ずる音場

任意の形の固体が一定の方向 (x)に振動する場合に生ずる音場は前節の方法と全く同じ方法で取扱うことができる．しかし余り問題を複雑化しないために，振動体の形が一つの軸に対して対称形を

保っている場合を扱うことにする.例えばこの軸の周囲に回転体を形成するものとか相互に直交する対称平面がこの軸で交わるようなものの運動がこの軸の方向 (x) に生ずる場合を扱う.

振動体の寸法は波長に比して充分小さいものとし,振動体のごく近傍の媒質内の音場に注目すると,この部分の運動は非圧縮性流体の運動と等しいとみなすことができるから,流体の振動体におよぼす作用は見かけ上,質量の増加に等しいと考えて差支えない.この見かけの質量の増加を一般的に記述するために振動体の振動速度をU とし,その周囲の流体の渦なしの運動による速度が U と一定の比例関係にあることに注意して流体の運動のエネルギーの総和を求めると$T=\frac{1}{2}\rho_0 Q' U^2$ と表わせる.ここに Q' は振動体の形状,大きさおよび運動方向によって定まる定数である.よって振動体の質量を Mとするとエネルギー方程式は

(33)
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}MU^2+\frac{1}{2}\rho_0 Q' U^2\right)=XU$$

となる.右辺の項は固体に作用する外力 X によって仕事がなされる割合 (速度) を表わしている.これより

(34)
$$(M+\rho_0 Q')\frac{dU}{dt}=X$$

を得る.よって振動体の慣性は見掛上 $\rho_0 Q'$ だけ増大したことになる.同じことを別の表現で述べれば流体の反作用は $-\rho_0 Q'\frac{dU}{dt}$ なる大きさの力に等しい.

実際に気体内で物体が振動する場合に遠方に生ずる音場は,物体を取り去ってその位置を媒質で満し,その置換した部分に適当な交番外力を加えて発生させた音場と等しいことは明白である.この仮想外力は, Qを物体の占めていた体積とすると,上に述べた媒質の反作用に平衡すると同時に $\rho_0 Q'\frac{dU}{dt}$なる運動量の加速度を生ぜしめるような大きさである.よって必要な仮想外力の大きさは

(35)
$$F=\rho_0(Q+Q')\frac{dU}{dt}=-i\omega\rho(Q+Q')U_0 e^{-i\omega t},$$

音源から遠方に生ずる速度ポテンシャルは

(36)
$$\phi=\frac{F}{4\pi\rho c}\frac{e^{ikr}}{r}\cos\theta=\frac{-ik(Q+Q')}{4\pi r}U_0\cos\theta\, e^{i(kr-\omega t)}$$

であり, この振源は強さが $(Q+Q')U_0=B$なる二重振源と等価であることが分る.よって3・5・4の(65)より輻射エネルギー流を求めると

(37)
$$\overline{W}=\frac{\rho_0 ck^4}{24\pi}(Q+Q')^2U_0^2=\frac{\rho_0 c|X|^2}{24\pi}\frac{\omega^2}{c^4}\frac{(Q+Q')^2}{(M+\rho_0 Q')^2}\qquad(\mathrm{W}).$$

振動体の形が球であれば$Q=\frac{4}{3}\pi a^3$, $Q'=\frac{1}{2}Q$であり,また半径 a なる円板をその面の法線方向に動かす場合には片面につき

$$Q=0.\quad Q'=\frac{8}{3}a^3.$$

4・2・5　気体に伝達される振動の強さ

振動体の振動が音波として周囲の媒質に伝達される場合の能率および色々の種類の気体に対するこの能率の相異について STOKESの行った研究[1] が有名である．その問題の動機はJ. LESLIE(1837)が水素ガス内で鐘を打つと空気中の場合に較べて非常に弱く音が聞えることを発見したが,当時はその説明がつかなかったことにある．STOKES はそれから約30年の後にこの問題を取り上げ，満足の行く説明に成功した．次に STOKES の説明の要点を述べる．

物体が任意の気体内でゆっくりと動く場合には,気体は恰も非圧縮性流体のように振舞い流体の中には圧縮が生ぜず,物体が前方に進むときは流体は後方に流れ,物体が後方に進むときは流体は前方に流れて単なる往復運動をするに過ぎない．しかし物体の動きが速くなり(振動体の振動数が増し),振動体の振動周期が短かくなると,気体の流動は振動体の運動に追従し得なくなり,非圧縮性を失って流体内には圧縮または稀薄化された部分が生ずる．このようにして音波が発生する．この音波の振動数が可聴周波帯にあればわれわれは音として聞くことができる．したがって音波が発生し始める状態では凝縮が生ずると同時に流体の流動も生じており,振動数が増加するにしたがって流動エネルギーに比して音波のエネルギーが増加する．振動数が低い範囲では流動によるエネルギーの方がはるかに大きい．振動数が与えられ，振動体の大きさ，形および振動姿態が定められた場合に種々の気体について調べると,気体内の音の伝播速度の大きなものほど高い振動数まで非圧縮性流体としての性質を保っていることが判明した．

音の伝播速度は$c=\sqrt{\kappa/\rho}$であるから，密度 ρの小さな気体は伝播速度 c が大きく，したがって高い振動数でも非圧縮性流体として振舞うことになり,音波として現われるエネルギーは気体の流動に費されるエネルギーに較べて割合が小さい．水素内で音が発生し難く,空気中では比較的強い音が生ずる理由はここにある．

球の振動による音場を例にとって示せばこの結論は容易に理解されよう．球の振動速度を

(38)
$$U = U_0 \cos \omega t$$

とし，球から一定の距離 r の点の音場を求めれば，振動数が充分小さい場合には

(39)
$$\phi = \frac{Aa^3}{2r^2} \cos\theta \cdot \cos \omega t$$

であるから，あたかも非圧縮性流体内の音場のようになる．振動数が次第に大きくなり，音源からの距離 r に比して波長 λが小さくなると音場の形は

(40)
$$\phi = -\frac{ka^3 U_0}{2r} \cos\theta \cdot \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right), \qquad (kr >> 1)$$

(1)　STOKES:“On the Communication of Vibration from a Vibrating Body to a Surrounding Gas” Phil.Trans., 1868.

で表わされ，(40) の振幅は (39) の kr倍（または $\frac{2\pi r}{\lambda}$倍）となっている．よって ω の増加により音葉の振幅は $\frac{\omega}{c}r$ 倍，または $\frac{2\pi r}{\lambda}$ 倍となり，振動数に比例した増加を示す．もしも同一振動数で異なる媒質の場合を考えると，(40) の振幅は $\frac{\omega}{c}$ に比例するから音速に反比例して減少する．よって音速の大きなものほど音場は弱くなる．

音源からの輻射エネルギー流は (37) より

(41)
$$\overline{W} = \frac{1}{6}\pi\rho_0 c k^4 a^6 U_0^2 = \frac{1}{6}\pi\rho_0 a^6 U_0^2 \frac{\omega^4}{c^3} \qquad \text{(W)}$$

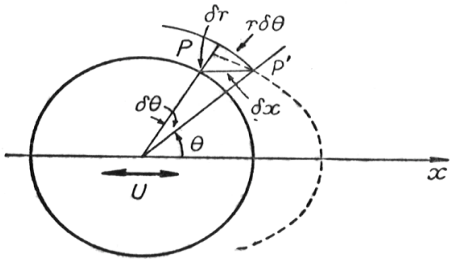
であるから，同一媒質内では輻射エネルギーはω^4 に比例し，同一振動数の場合は $\rho_0 = \kappa / c^2$ なることより $\frac{1}{c^5}$ に比例する．よって水素気体内の場合は酸素に比して輻射エネルギーは約 $\frac{1}{1000}$ となる．

気体内で物体の振動するエネルギーが音のエネルギーに変換される割合は振動体の音響発生の能率を表わす．この能率は振動体表面の流体が表面の切線方向に流動するために低下する．この能率の低下は横方向の速度成分（径方向に対して）で表わされ，輻射音場を弱める一つの原因となる．横方向の速度成分がどの程度に音場を弱めるかを知るには次に示すような計算をする（STOKES）．

x 方向に振動する球の表面の一点 P の変位を δxとすると，δx は径方向成分 δrと横方向成分 $r\delta\theta$とに分解して考えられる．したがって $A\cos\theta$ なる速度で　x方向に振動する点では δrと　$r\delta\theta$ とに比例した速度成分

(42)
$$\dot{\xi}_r = U_0 \cos^2\theta\,, \quad \dot{\xi}_\theta = -U_0 \cos\theta \cdot \sin\theta$$

を有する．いま仮りに横方向の流体の運動を防止することができたとすると[(2)]，各点の速度は $\dot{\xi}_r$のみとなる．半径a　なら呼吸球の表面の法線方向の速度が $C\cos\omega t$ となるような音源の強さは $4\pi a^2 C\cos\omega t$であり，この音源の輻射エネルギーは $\frac{1}{2}k^2 a^2 \rho_0 c C^2$ あるから，呼吸球の表面の各点の径方向速度が $U_0\cos\theta$ であるような音源の場合には $C = U_0\cos\theta$ とおき，全表面　$(\theta = 0 \sim 2\pi)$にわたって積分すると横方向の流動を阻止した場合の輻射エネルギーが求まり



第4・11図

(43)
$$\overline{W} = \frac{2}{3}\pi\rho_0 c k^2 a^4 U_0^2 \qquad \text{(W)}$$

となる．

(43) と (41) とを比較すると (41) は (43) の $\frac{1}{4}k^2 a^2$ 倍となっている．しかるに $ka << 1$であるから (41) は (43) よりかなり小さく，このことは横方向の運動に起因する損失を表わしている．すなわち小さな球が振動する場合に，流体の横方向連動を許した場合の音の輻射エネルギーは，これを

（2）　原点から細い管を放射線状に出して $\delta\theta$ なる角度の中で　r　方向の運動のみを与えたと仮定する．

（3）　$\cos^2\theta$ のすべての方向の平均値は $\frac{1}{3}$ である．

防止した場合の $\frac{1}{4}k^2a^2$ 倍に減少する.

実際問題として鐘や板を振動させる場合には,その表面に節線と波腹が生じるために逆位相の速度で振動する部分が相接して存在し,そのため周囲の媒質は横方向に流動する機会が増加する.よってこのように多数の節線の生ずる場合には輻射される音の強さはさらに弱められる.このことはスピーカーの高音部輻射特性の低下と関係している.

球面上に種々の形の節線が生じた場合を STOKES は解いている.それによると節線か1本ある球の場合, 節線が $\theta=\frac{\pi}{2}$ なる大円ならば, 既に示したように輻射は $\frac{1}{4}k^2a^2$ 倍に減少するが, 直交する2節線を有する場合には $\frac{1}{81}k^4a^4$ 倍に減少する. さらに節線が増すと急激に音は弱くなる. 多数の節線が生ずる場合には球の大きさ $2\pi a$ が波長 λ に比して小さくなければならぬという必要はないが,節線で囲まれた1区域の大きさが波長に比して充分小さいことが以上の理論を適用するためには必要である. しかし球の振動の場合には何等 ka の値に制限を設けることなく (14) から出発して結果を求めることができる.

STOKES は同時に円筒がその軸と直角方向に振動する場合に周囲に生ずる音場を計算している.その方法は,球の場合と全く同様であるが,この結果から絃などを振動させて直接音波を発生させる機構が理解される. その結果によれば,円筒の断面円の円周と,発生される音波の波長との比に関係してはいるが,実際問題として絃などの場合に直接空気中に伝えられる音波は著しく小さいことが示されている.したがって絃の振動の所で述べたような,絃を打って発音するピアノのような場合には,大部分の音は響板から輻射されることになる.

4・2・6　円筒状音源から輻射される音場の一般的解法

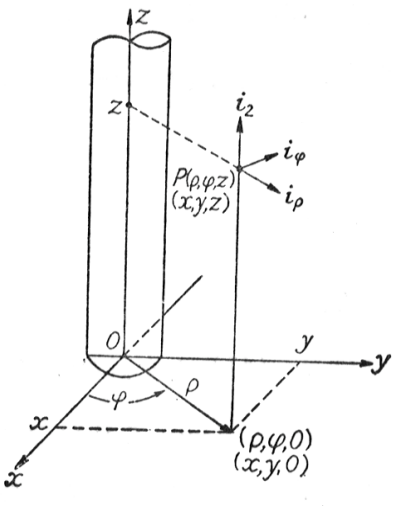
単純な形状の振動体から輻射される音場は,音波の一般式を適当な座標系を用いて解くことによって正確に求めることができる.その一例として円筒形振動体を扱って見よう.

円筒形振動体の軸を z 軸とする円筒座標 (ρ,φ,z) を用いて空間内の座標を表わすことにすると, 第4・12図のように円筒座標と直角座標 (x,y,z) との関係は

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi,\quad z=z, \tag{44}$$

または

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2},\quad \varphi=\tan^{-1}\frac{y}{x}, \tag{45}$$



第4・12図　円筒座標.

$$z = z$$

であり，したがって LAPLACE の方程式は

(46)
$$\nabla^2\phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0$$

と表わされる．よって音波の一般式3・4の（5）は

(47)
$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$$

と書ける．(47) の一般解は変数分離法を用いて求めることができる．いま解の形を

(48)
$$\phi = R(\rho)\cdot\Phi(\varphi)\cdot Z(z)\cdot e^{-i\omega t}$$

と仮定して（47）に代入すると

(49)
$$\frac{1}{\rho R(\rho)}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\frac{\partial R(\rho)}{\partial\rho}\right] + \frac{1}{\rho^2\Phi(\varphi)}\frac{\partial^2\Phi(\varphi)}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{Z(z)}\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z} = -\frac{\omega^2}{c^2},$$

分離定数を導入して変数分離を行うと

(50)
$$\frac{1}{\rho R}\frac{d}{d\rho}\left[\rho\frac{dR}{d\rho}\right] + \frac{1}{\rho^2\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + k^2 = \frac{-1}{Z}\frac{d^2Z}{dz} = k_z^2,$$

または

(51)
$$\frac{1}{\rho R}\frac{d}{d\rho}\left[\rho\frac{dR}{d\rho}\right] + \frac{1}{\rho^2\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + k^2 - k_z^2 = 0,$$

(52)
$$\frac{d^2Z}{dz^2} + k_z^2 Z = 0,$$

ただし $k = \omega / c$，k_z は分離定数である．

（52）の解は

(53)
$$Z(z) = Ee^{ik_z z} + Fe^{-ik_z z}$$

であり，また（51）は 2・2・4 の（52）と同形であるから，その解は（59）の形となる．よって（47）の一般解は

(54)
$$\phi_n = \left\{C\,\mathrm{J}_n(k_p\rho) + D\,\mathrm{N}_n(k_p\rho)\right\}\left\{A\cos n\varphi + B\sin n\varphi\right\}$$
$$\cdot\left\{Ee^{ik_z z} + Fe^{-ik_z z}\right\}\cdot e^{-i\omega t},$$

ただし，

$$k_p = \sqrt{k^2 - k_z^2},$$
$$n = 0, 1, 2, 3, \cdots,$$
$$k = \frac{\omega}{c}$$

であり，　A B C D E F 等は境界条件および初期条件によって定められる任意定数である．

(54) は円筒形の境界面を有する領域内の波動現象を表現するのに便利な解であり，その径函数の一つ $\mathrm{J}_n(z)$ は BESSEL の函数または第一種の円筒函数と呼ばれ，既に 2・2・4 および 2・2・5 で紹介してある．もう一つの径函数 $\mathrm{N}_n(z)$ は NEUMANN の函数または第二種の円筒函数と呼ばれ，次に示す

ような性質を有している．すなわち級数展開式

(55)
$$\mathrm{N}_0(z)=\frac{1}{\pi}\left[2\mathrm{J}_0(z)\cdot\ln\frac{2}{\gamma z}+0.5z^2-0.046872z^4+0.001952^6+\cdots\right],$$

(56)
$$\mathrm{N}_1(z)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{-2}{z}+2\mathrm{J}_1(z)\left\{\ln\frac{\gamma z}{2}-1\right\}+\frac{1}{2}z+\frac{2+\frac{1}{2}}{1!2!}\left(\frac{z}{2}\right)^3\right.$$
$$\left.-\frac{2+\frac{2}{2}+\frac{1}{3}}{2!3!}\left(\frac{z}{2}\right)^5+\frac{2+\frac{2}{2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}}{3!4!}\left(\frac{z}{2}\right)^7+\cdots\right],$$

$$\gamma=1.7812,\qquad \ln\gamma=0.5772,$$

漸近展開式の極限：

(57)
$$\mathrm{N}_n(z)\underset{z\to\infty}{\Rightarrow}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin\left(z-\frac{2n+1}{4}\pi\right)$$

であり，循環式，微積分公式は2･3･5の $\mathrm{J}_n(z)$ の式と同形である．なお

(58)
$$\mathrm{N}_{n-1}(z)\mathrm{J}_n(z)-\mathrm{N}_n(z)\mathrm{J}_{n-1}(z)=\frac{2}{\pi z}.$$

(55)(56)より明らかなように，第二種の円筒函数は $z=0$ にて $-\infty$ に発散する．よって円筒の中心で有限確定値を取るような函数を表現する場合には(54)にて $D=0$ とおかねはならぬ．円形膜の振動の解はこの例である．円筒の中心から遠くはなれた場所では

(59)
$$\mathrm{J}_n(z)\underset{z\to\infty}{\Rightarrow}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z-\frac{2n+1}{4}\pi\right)$$

となるから，$\mathrm{J}_n(z)$ は $\frac{1}{\sqrt{z}}\cos z$，$\mathrm{N}_n(z)$ は $\frac{1}{\sqrt{z}}\sin z$ の形となり，それぞれ z の平方根に比例して減衰して行く互いに独立な函数を表わしている．

円筒軸から半径方向に一様に拡がって行く外向発散波の波頭面は，軸を中心とする円筒面上で一定の振幅と位相を有している．このような波面を対称円筒波と呼ぶことにすると，その波面は z と φ とには無関係で ρ のみの函数であり，かつ遠方では(57)と(59)とより

$$\frac{1}{\sqrt{\rho}}e^{i(kp-\omega t)}$$

の形となるものと考えられる．このような解は(54)より容易に求めることができ

$$\phi=A_0\left\{\mathrm{J}_0(k_p\rho)+i\mathrm{N}_0(k_p\rho)\right\}e^{-i\omega t},$$
$$p=-i\omega\rho_0A_0\left\{\mathrm{J}_0(k_p\rho)+i\mathrm{N}_0(k_p\rho)\right\}e^{-i\omega t},$$
$$\dot{\xi}_p=-k_pA_0\left\{\mathrm{J}_1(k_p\rho)+i\mathrm{N}_1(k_p\rho)\right\}e^{-i\omega t}$$

を得る．この解は $k_p\rho\to\infty$ の場合には

$$\left\{\phi=\sqrt{\frac{2}{\pi k_p\rho}}A_0e^{i(k_pp-\omega t)-i\frac{\pi}{4}},\right.$$

(61)
$$\begin{cases} p \Rightarrow -i\omega\rho_0\sqrt{\dfrac{2}{\pi k_p\rho}}\,A_0\,e^{i(k_p\rho-\omega t)-i\frac{\pi}{4}}, \\ \dot{\xi}_p \Rightarrow --ik_p\sqrt{\dfrac{2}{\pi k_p\rho}}\,A_0\,e^{i(k_p\rho-\omega t)-i\frac{\pi}{4}} \end{cases}$$

となる．一方 $k_p\rho << 1$ の場合には

(62)
$$\phi \Rightarrow \left[1+i\frac{2}{\pi}\ln\frac{2}{\gamma k_p\rho}\right]A_0,$$
$$p \Rightarrow -i\omega\rho_0 A_0\left[1+i\frac{2}{\pi}\ln\frac{2}{\gamma k_p\rho}\right],$$
$$\dot{\xi}_p \Rightarrow -i\frac{2}{\pi}\frac{A_0}{k_p\rho}$$

となる．[1]

このような音場は，半径 a なる円筒の表面が $\omega/2\pi$ の周波数で一様に膨れたり縮んだりする呼吸円筒によって発生されると考えることができる．この呼吸円筒の表面の半径方向の速度を

(63)
$$U = U_0 \qquad (\mathrm{m/s})$$

とすると，$\rho = a$ にて (60) の ξ_p が (63) と等しくなければならぬから

(64)
$$A_0 = \frac{-U_0}{k_p\left[\mathrm{J}_1(k_pa)+i\mathrm{N}_1(k_pa)\right]} \underset{k_pa\to 0}{\Rightarrow} -i\frac{\pi a}{2}U_0$$

となり，音場は

(65)
$$\phi = -\frac{\left\{\mathrm{J}_0(k_p\rho)+i\mathrm{N}_0(k_p\rho)\right\}}{k_p\left\{\mathrm{J}_1(k_pa)+i\mathrm{N}_1(k_pa)\right\}}U_0e^{-i\omega t},$$
$$p = \frac{i\omega\rho_0}{k_p}\frac{\left\{\mathrm{J}_0(k_p\rho)+i\mathrm{N}_0(k_p\rho)\right\}}{\left\{\mathrm{J}_1(k_pa)+i\mathrm{N}_1(k_pa)\right\}}U_0e^{-i\omega t},$$
$$\dot{\xi}_p = \frac{\left\{\mathrm{J}_1(k_p\rho)+i\mathrm{N}_1(k_p\rho)\right\}}{\left\{\mathrm{J}_1(k_pa)+i\mathrm{N}_1(k_pa)\right\}}U_0e^{-i\omega t}.$$

円筒の半径が小さくて $k_pa << 1$ なる場合に，円筒から充分離れた点の音場を求めると

(66)
$$\phi = -i\frac{\pi a}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi k_p\rho}}U_0e^{i(k_p\rho-\omega t)-i\frac{\pi}{4}},$$
$$p = -\frac{\omega\rho_0\pi a}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi k_p\rho}}U_0e^{i(k_p\rho-\omega t)-i\frac{\pi}{4}},$$
$$\dot{\xi}_p = -\frac{k_p\pi a}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi k_p\rho}}U_0e^{i(k_p\rho-\omega t)-i\frac{\pi}{4}}$$

---

(1)　$\mathrm{H}_n^{(1)}(z) = \mathrm{J}_n(z) + i\mathrm{N}_n(z)$ を第一種の HANKEL 函数と呼ぶ．
$\mathrm{H}_n^{(2)}(z) = \mathrm{J}_n(z) - i\mathrm{N}_n(z)$ を第二種の HANKEL 函数と呼ぶ．この両者を用いて中心を除いた領域の BESSEL 方程式の解を構成することができる．

となる．これより呼吸円筒の遠方を取り囲む半径 ρ なる円筒面を貫いて外向に流出するエネルギー流の時間平均値を求めると，円筒面の z 方向の単位の長さにつき

(67)
$$\overline{W} = \frac{1}{2}\Re e\left[p \cdot \tilde{\dot{\xi}}_\rho \right] \cdot 2\pi\rho$$
$$= \frac{\pi^2 a^2}{2}\omega\rho_0 \left|U_0\right|^2 \qquad (\mathrm{W}),$$

またエネルギー流密度の時間平均値は

(68)
$$\overline{w} = \frac{\overline{W}}{2\pi\rho} = \frac{\pi a^2}{4}\omega\rho_0 \frac{\left|U_0\right|^2}{\rho} \qquad (\mathrm{W/m^2})$$

となる．(67) は ρ に無関係の値であるから呼吸円筒の音響出力と見なすことができる．

次に円筒二重音源の音場を求めて見よう．二重音源の軸が x 軸と一致しているものとし，3・5・4 の (57) にならって円筒二重音源による音場を

(69)
$$\phi = -B\frac{\partial}{\partial x}\left[\mathrm{J}_0(k_p\rho) + i\mathrm{N}_0(k_p\rho) \right] e^{-i\omega t}$$

と仮定すると容易に

$$\phi = k_p B\left\{ \mathrm{J}_1(k_p\rho) + i\mathrm{N}_1(k_p\rho) \right\}\cos\varphi \cdot e^{-i\omega t},$$
$$p = -i\omega\rho_0 k_p B\cos\varphi\left\{ \mathrm{J}_1(k_p\rho) + i\mathrm{N}_1(k_p\rho) \right\} e^{-i\omega t},$$
$$\xi_\rho = -k_p^2 B\cos\varphi\left\{ \mathrm{J}'_1(k_p\rho) + i\mathrm{N}'_1(k_p\rho) \right\} e^{-i\omega t}$$

を得る．ここに $\mathrm{J}'_n(z)$ は $\mathrm{J}_n(z)$ の z に関する微分を表わす．$k_p\rho$ が充分に大きい場合には

(71)
$$\phi = k_p B\cos\varphi\sqrt{\frac{2}{\pi k_p\rho}}\, e^{i(k_p\rho-\omega t)-i\frac{3}{4}\pi},$$
$$p = -i\omega\rho_0 k_p B\cos\varphi\sqrt{\frac{2}{\pi k_p\rho}}\, e^{i(k_p\rho-\omega t)-i\frac{3}{4}\pi},$$
$$\dot{\xi}_\rho = ik_p^2 B\cos\varphi\sqrt{\frac{2}{\pi k_p\rho}}\, e^{i(k_p\rho-\omega t)-i\omega t},$$

$k_p\rho << 1$ の場合には

(72)
$$\phi = -i\frac{2}{\pi\rho}B\cos\varphi \cdot e^{-i\omega t},$$
$$p = \frac{-2\omega\rho_0}{\pi\rho}B\cos\varphi \cdot e^{-i\omega t},$$
$$\xi_\rho = -i\frac{2}{\pi\rho^2}B\cos\varphi \cdot e^{-i\omega t}$$

となり，これは円筒状二重音源より輻射される音場を表わしている．

z 軸を中心軸とする半径 a なる円筒が x 軸方向に

(73)
$$U = U_0 e^{-i\omega t} \qquad (\mathrm{m/s})$$

の速度で振動している場合には，円筒表面の速度の ρ 成分は

(74)
$$U_p = U_0 \cos\varphi \cdot e^{-i\omega t}$$

である．この円筒の周囲に生ずる音場を求めるには円筒表面の速度のρ 方向成分が (70) の ξ_p に等しいとおき

(75)
$$-k_p^2 B \cos\varphi \left\{ \mathrm{J}_1'(k_p a) + i\,\mathrm{N}_1'(k_p a) \right\} = U_0 \cos\varphi$$

より B を U_0で表わせば

(76)
$$B = \frac{-U_0 \cancel{\cos\varphi}}{k_p^2 \left\{ \mathrm{J}_1'(k_p a) + i\,\mathrm{N}_1'(k_p a) \right\}}.$$

円筒の半径が小さくて $k_p a << 1$ の場合には

(77)
$$B \approx i \frac{\pi a^2}{2} U_0$$

となるから，円筒から充分遠方の音場は

(78)
$$\begin{aligned}
\phi &= \frac{\pi a^2}{2} U_0 \cos\varphi \sqrt{\frac{2k_p}{\pi\rho}}\, e^{i(k_p\rho - \omega t) - i\frac{3}{4}\pi}, \\
p &= \frac{\pi a^2 \omega \rho_0}{2} U_0 \cos\varphi \sqrt{\frac{2k_p}{\pi\rho}}\, e^{i(k_p\rho - \omega t) - i\frac{3}{4}\pi}, \\
\dot{\xi}_\rho &= \frac{\pi a^2 k_p}{2} U_0 \cos\varphi \sqrt{\frac{2k_p}{\pi\rho}}\, e^{i(k_p\rho - \omega t) - i\frac{3}{4}\pi}
\end{aligned}$$

となる．半径 ρなる円筒表面の z方向の単位長を貫いて流出するエネルギー流は

(79)
$$\overline{W} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} |p| \left| \dot{\xi}_p \right| \rho\, d\varphi = \pi^2 a^4 \omega \rho_0 k_p^2 U_0^2 \qquad (\mathrm{W}),$$

また φなる方向へ向って流れるエネルギー流密度は

(80)
$$\overline{w} = \frac{1}{2} |p| \left| \dot{\xi}_p \right| = \frac{\pi a^4}{4\rho} \omega \rho k_p^2 \left| U_0^2 \right| \cos\varphi \qquad (\mathrm{W/m^2})$$

である．(79)は無限に長い円筒二重音源の単位長の側面から輻射される音響出力と見なすことができる．

4・2・7　球状音源から輻射される音場の一般的解法

球状の振動体から輻射される音場の一般的な場合を取扱うには，音波の一般式3・4の (5) を球座標に展開し，その一般解を求めておかねばならぬ．3・4・2 の (17) を用いれば，球座標で表わした音波の一般式は

(81)
$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

となるので，解の形を

(82)
$$\phi = R(r) \cdot \Theta(\theta) \cdot \Phi(\varphi) \cdot e^{-i\omega t}$$

とおして (81) に代入すると

(83)
$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta}\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Phi}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + \frac{\omega^2}{c^2} r^2 = 0,$$

または $\omega^2/c^2 = k^2$ とおいて変形すると

(84)
$$\frac{\sin^2\theta}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + k^2r^2\sin^2\theta + \frac{1}{\Theta}\sin\theta\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) = -\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = m^2$$

となるから，まず $\Phi(\varphi)$が分離されて

(85)
$$\Phi = C\cos m\varphi + D\sin m\varphi\ ,$$

(86)
$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + k^2r^2 + \frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} = 0$$

となる．これをさらに変数分離を行うと

(87)
$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\Theta + \mu\Theta = 0\ ,$$

(88)
$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + k^2r^2R - \mu R = 0$$

となり，θ のみの式 (87) と r のみの式 (88) を得る．ここに m, μ および R はそれぞれφ座標，θ 座標および r 座標に関する境界条件によって定まる定数または函数である．

φ座標に関する境界面が存在しなければ m は正整数となり

(89)
$$m = 0, 1, 2, 3, \cdots.$$

いま，特に $m = 0$ の場合，すなわち φ方向には波動現象の現われない場合について (87) を解いてを求めてみると，(87) は $\cos\theta = x$ とおけば

(90)
$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d\Theta}{dx}\right] + \mu\Theta = 0$$

とかけるので

$$\Theta = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$$

とおいて (90) に代入すると $\Theta(x)$の形が決定できて

(91)
$$\Theta(x) = a_0\left\{1 - \frac{\mu}{2!}x^2 - \frac{\mu(6-\mu)}{4!}x^4 - \frac{\mu(6-\mu)(20-\mu)}{6!}x^6 - \cdots\right\}$$
$$+ a_1\left\{x + \frac{2-\mu}{3!}x^3 + \frac{(2-\mu)(12-\mu)}{5!}x^5 + \cdots\right\}.$$

(91) が $x = \pm 1$で無限大とならぬためには μ a_0 a_1の間に次に示すような特別の関係がなければならぬ．すなわら

(92)
$$\mu = 0, \quad a_1 = 0,$$
$$\mu = 2, \quad a_0 = 0,$$
$$\mu = 6, \quad a_1 = 0,$$
$$\mu = 12, \quad a_0 = 0, \quad \text{等々.}$$

よってμ の取り得る値は

(93)
$$\mu = n(n+1), \qquad n = 0, 1, 2, 3, \cdots.$$

(91) は (93) の条件を備えていれば $-1<x<+1$ の範囲内で有限である．これを第 n 階のLEGENDREの函数[1]と呼び，$\mathrm{P}_n(x)$ と記す． n の小さい範囲の $\mathrm{P}_n(x)$の形は

(94)
$$
\begin{aligned}
&n=0, \quad \mu=0: && \mathrm{P}_0(x)=1, \\
& && \mathrm{P}_0(\cos\theta)=1. \\
&n=1, \quad \mu=2: && \mathrm{P}_1(x)=x, \\
& && \mathrm{P}_1(\cos\theta)=\cos\theta. \\
&n=2, \quad \mu=6: && \mathrm{P}_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1), \\
& && \mathrm{P}_2(\cos\theta)=\frac{1}{4}(3\cos 2\theta+1). \\
&n=3, \quad \mu=12: && \mathrm{P}_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x), \\
& && \mathrm{P}_3(\cos\theta)=\frac{1}{8}(5\cos 3\theta+3\cos\theta).
\end{aligned}
$$

また $\mathrm{P}_n(x)$を解として持つ微分方程式を LEGENDRE の微分方程式と呼ぶ．LEGENDRE の函数の性質は次に示すようなものである．[2]

LEGENDRE の微分方程式 ：

(95)
$$(x^2-1)\frac{d^2\mathrm{P}}{dx^2}+2x\frac{d\mathrm{P}_n}{dx}-n(n+1)\mathrm{P}_n=0.$$

級数展開 ：

(96)
$$\mathrm{P}_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n,$$

ただし

(97)
$$x=\cos\theta.$$

循環式 ：

(98)
$$(2n+1)x\mathrm{P}_n(x)=(n+1)\mathrm{P}_{n+1}(x)+n\mathrm{P}_{n-1}(x),$$

(99)
$$(2n+1)\mathrm{P}_n(x)=\frac{d}{dx}\left[\mathrm{P}_{n+1}(x)-\mathrm{P}_{n-1}(x)\right].$$

直交条件 ：

(100)
$$\int_{-1}^{+1}\mathrm{P}_n(x)\cdot\mathrm{P}_m(x)\,dx=\begin{cases}0, & (m\neq n),\\ \dfrac{2}{2n+1} & (n=m).\end{cases}$$

(100) の性質を利用して任意の函数 $F(x)$ を $\mathrm{P}_n(x)$で展開することができ

(101)
$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\mathrm{P}_n(x),$$

(1) LEGENDRE's polynominal

(2) YAHNKE-EMDE:“ Funktionentafeln ” p.173 参照.

(102)
$$C_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{1} F(x)\cdot \mathrm{P}_n(x)dx\,.$$

次に (88) から径函数 $R(r)$ を求めよう． $m=0$ の場合には，(93) のように，$\mu = n(n+1)$, $n=0$, 1 , 2 ,… であるから，(88) は

(103)
$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d^2R}{sr^2}\right)+k^2r^2R-n(n+1)R=0\,,$$

または

(104)
$$\frac{d^2R}{dz^2}+\frac{2}{z}\frac{dR}{dz}+\left(1-\frac{n(n+1)}{z^2}\right)R=0\,,$$

ただし

$$z=kr=\frac{2\pi r}{\gamma}\,.$$

(104) は BESSEL の微分方程式 2・2・4 の (56) と似ているので，この解を BESSEL 函数で表わすことができるが，また一方三角函数でも表わすことができる．この解を球面 BESSEL 函数 (3) と呼び $\mathrm{j}_n(z)$ と表わす．また第二種の解を球面 NEUMANN 函数 (4) と呼び $\mathrm{n}_n(z)$ と表わす．これらを三角函数で表わすと

(105)
$$\mathrm{j}_0(z)=\frac{\sin z}{z}\,,$$
$$\mathrm{j}_1(z)=\frac{\sin z}{z^2}-\frac{\cos z}{z}\,,$$
$$\mathrm{j}_2(z)=\left(\frac{3}{z^3}-\frac{1}{z}\right)\sin z-\frac{3}{z^2}\cos z\,,$$

および

(106)
$$\mathrm{n}_0(z)=-\frac{\cos z}{z}\,,$$
$$\mathrm{n}_1(z)=-\frac{\cos z}{z^2}-\frac{\sin z}{z}\,,$$
$$\mathrm{n}_2(z)=-\left(\frac{3}{z^3}-\frac{1}{z}\right)\cos z-\frac{3}{z^2}\sin z\,,$$

となるが．その一般形は半奇数次の BESSEL 函数で表わされ

(107)
$$\mathrm{j}_n(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2\pi}}\,\mathrm{J}_{n+\frac{1}{2}}(z)\,,$$

(108)
$$\mathrm{n}_n(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,\mathrm{N}_{n+\frac{1}{2}}(z)$$

となる． z が小さい場合には

(3)　spherical BESSEL function
(4)　spherical NEUMANN function

(109)
$$\mathrm{j}_n(z) = 2^n z^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (n+m)!}{m!(2n+2m+1)!} z^{2m}$$
$$\underset{z\to 0}{\Rightarrow} \frac{z^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)} ,$$

(110)
$$n_n(z) = -\frac{1}{2^n z^{n+1}} \sum \frac{\Gamma(2n-2m+1)}{m!\,\Gamma(n-m+1)} z^{2m}$$
$$\underset{z\to 0}{\Rightarrow} -\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{z^{n+1}} ,$$

z が大きな場合の極限値は

(111)
$$\mathrm{j}_n(z) \underset{z\to\infty}{\Rightarrow} \frac{1}{z}\cos\left(z - \frac{n+1}{2}\pi\right) ,$$

(112)
$$\mathrm{n}_n(z) \underset{z\to\infty}{\Rightarrow} \frac{1}{z}\sin\left(z - \frac{n+1}{2}\pi\right) ,$$

また $\mathrm{j}_n(z)$ と $\mathrm{n}_n(z)$ との間の関係式は

(113)
$$\int \mathrm{j}_0^2(z) z^2 dz = \frac{z^3}{2}\left\{\mathrm{j}_0^2(z) + \mathrm{n}_0(z)\cdot \mathrm{j}_1(z)\right\} ,$$

(114)
$$\int \mathrm{n}_0^2(z) z^2 dz = \frac{z^3}{2}\left\{\mathrm{n}_0^2(z) - \mathrm{j}_1(z)\cdot \mathrm{n}_1(z)\right\} ,$$

(115)
$$\mathrm{n}_{n-1}(z)\cdot \mathrm{j}_n(z) - \mathrm{n}_n(z)\cdot \mathrm{j}_{n-1}(z) = \frac{1}{z^2} .$$

なお球面 BESSEL 函数 $\mathrm{j}_n(z)$ と $\mathrm{n}_0(z)$ を一括して $z_n(z)$ と記すと，循環式は

(116)
$$\mathrm{z}_{n-1}(z) + \mathrm{z}_{n+1}(z) = \frac{2n+1}{2}\mathrm{z}_n(z) ,$$

微分公式は

(117)
$$\frac{d}{dz}\left[\mathrm{z}_n(z)\right] = \frac{1}{2n+1}\left\{n\mathrm{z}_{n-1}(z) - (n+1)\mathrm{z}_{n+1}(z)\right\} ,$$

(118)
$$\frac{d}{dz}\left[z^{n+1}\mathrm{z}_n(z)\right] = z^{n+1}\mathrm{z}_{n-1}(z) ,$$

(119)
$$\frac{d}{dz}\left[z^{-n}\mathrm{z}_n(z)\right] = -z^{-n}\mathrm{z}_{n+1}(z) ,$$

(120)
$$\mathrm{z}_0'(z) = -\mathrm{z}_1(z) .$$

積分公式は

(121)
$$\int \mathrm{z}_1(z)dz = -\mathrm{z}_0(z) ,$$

(122)
$$\int \mathrm{z}_0(z) z^2 dz = z^2 \mathrm{z}_1(z) ,$$

(123)
$$\int \mathrm{z}_n^2(z) z^2 dz = \frac{z^3}{2}\left\{\mathrm{z}_n^2(z) - \mathrm{z}_{n-1}(z)\cdot \mathrm{z}_{n+1}(z)\right\} , \quad (n>0) .$$

この結果を用いて (87) および (88) の解を求めると

(124) $$\Theta(\theta) = \mathrm{P}_n(\cos\theta),$$

(125) $$R(r) = A\,\mathrm{j}_n(kr) + B\,\mathrm{n}_n(kr)$$

となるから，$m=0$ の場合の (1) の一般解は

$$\phi = \left\{ A\,\mathrm{j}_n(kr) + B\,\mathrm{n}_n(kr) \right\} \cdot \mathrm{P}_n(\cos\theta) \cdot e^{-i\omega t}$$

となる．これは r 方向および θ 方向にのみ波動現象を生じ，φ 方向には波動を生じない場合を表わす一般解である．

m が 0 でない場合には，$x = \cos\theta$ とおくと (87) は

(127) $$(x^2-1)\frac{d^2\Theta}{dx^2} + 2x\frac{d\Theta}{dx} + \left[n(n+1) + \frac{m^2}{x^2-1} \right]\Theta = 0$$

となり，その解は

(128) $$\Theta(x) = E\,P_n^m(x) + F\,Q_n^m(x)$$

と表わされる．ここに $\mathrm{P}_n^m(x)$ は第一種の LEGENDRE 陪函数[5]，$Q_n^m(x)$ は第二種の LEGENDRE 陪函数と呼ばれ,次のような性質を有している．[6]

(129) $$\mathrm{P}_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m \mathrm{P}_n(x)}{dx^m} = \frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^n \cdot n!} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2-1)^n,$$

(130) $$\mathrm{P}_n^m(x) = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \left\{ x^{n-m} - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2(2n-1)} x^{n-m-2} + \cdots \right\}.$$

(131) $$\mathrm{P}_n^0(x) = \mathrm{P}_n(x).$$

(132) $$\begin{cases} \mathrm{P}_1^1(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} = \sin\theta, \\ \mathrm{P}_2^1(x) = 3(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{2}(\sin 2\theta), \\ \mathrm{P}_2^2(x) = 3(1-x^2) = \dfrac{3}{2}(1-\cos 2\theta), \\ \mathrm{P}_3^1(x) = \dfrac{3}{2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}(5x^2-1) = \dfrac{3}{8}(\sin\theta + 5\sin 3\theta), \\ \mathrm{P}_3^2(x) = 15(1-x^2)x = \dfrac{15}{4}(\cos\theta - \cos 3\theta), \\ \mathrm{P}_3^3(x) = 15(1-x^2)^{\frac{3}{2}} = \dfrac{15}{4}(3\sin\theta - \sin 3\theta), \end{cases}$$

(133) $$Q_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m Q_n(x)}{dx^m},$$

(134) $$Q_n(x) = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots 2n}{3\cdot 5\cdots(2n+1)} \left\{ \cos(n+1)\theta + \frac{1(n+1)}{1(2n+3)} \cos(n+3)\theta + \frac{1\cdot 3\cdot(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot(2n+3)(2n+5)} \cos(n+5)\theta + \cdots \right\},$$

(5) LEGENDRE's associated function of 1st kind

(6) (90) を x について m 回微分すると (127) を得る．

(135)
$$Q_0(x) = \tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},$$
$$Q_1(x) = xQ_0(x) - 1,$$
$$Q_2(x) = \mathrm{P}_2(x)\cdot Q_0(x) - \frac{3}{2}x,$$
$$Q_3(x) = \mathrm{P}_3(x)\cdot Q_0(x) - \frac{5}{2}x^2 + \frac{2}{3},$$

漸近展開は

$$n >> 1, \qquad \varepsilon < \theta < \pi - \varepsilon, \qquad 0 < \varepsilon < \frac{\pi}{6}$$

の範囲で

(136)
$$\mathrm{P}_n(\cos\theta) = \sqrt{\frac{2}{n\pi\sin\theta}}\left[\left(1-\frac{1}{4n}\right)\sin\alpha - \frac{1}{8n}\cot\theta\cdot\cos\alpha\right],$$
$$Q_n(\cos\theta) = \sqrt{\frac{\pi}{2n\sin\theta}}\left[\left(1-\frac{1}{4n}\right)\cos\alpha + \frac{1}{8n}\cot\theta\cdot\sin\alpha\right],$$

(137)
$$\mathrm{P}_n^m(\cos\theta) = (-n)^m\sqrt{\frac{2}{n\pi\sin\theta}}\sin\left(\alpha + \frac{m\pi}{2}\right)\cdots,$$
$$Q_n^m(\cos\theta) = (-n)^m\sqrt{\frac{\pi}{2n\sin\theta}}\cos\left(\alpha + \frac{m\pi}{2}\right)\cdots, \qquad (n >> m)$$

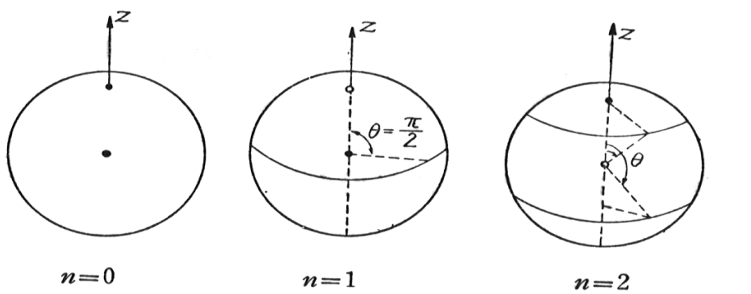
ただし

$$\alpha = \left(n + \frac{1}{2}\right)\theta + \frac{\pi}{4}.$$

LEGENDRE の函数 $\mathrm{P}_n(\cos\theta)$ は球帯調和函数[7]とも呼ばれ,

(138)
$$\mathrm{P}_n(\cos\theta) = 0$$

を満足する点の軌跡は半径1なる単位球表面上の赤道に平行な n 本の節線を表わす．その例は第4・13図に示す通りであって，これらの節線は球面を $(n+1)$ 個の球帯に分割する．

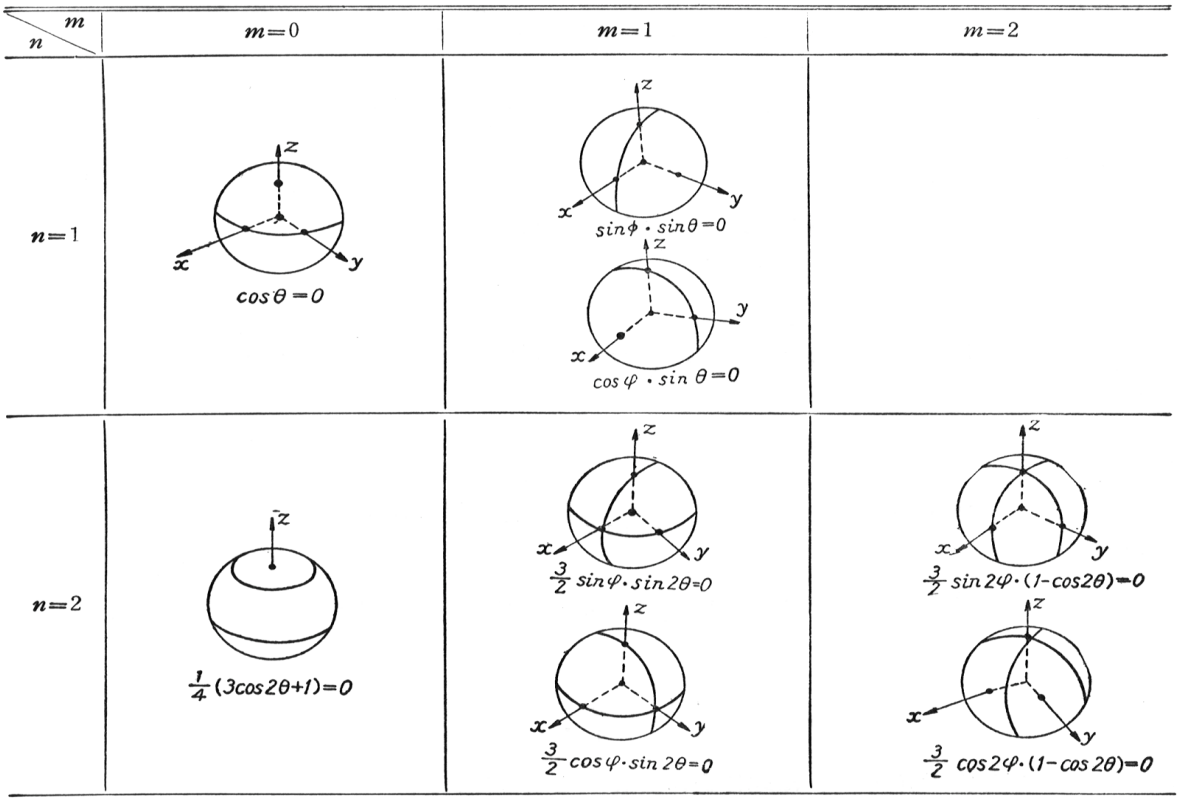


第4・13図　球帯調和函数 $\mathrm{P}_n(\cos\theta) = 0$ の表わす節線

函数 $\cos m\varphi\cdot\mathrm{P}_n^m(\cos\theta)$ および $\sin m\varphi\cdot\mathrm{P}_n^m(\cos\theta)$ は単位球表向上における周期的変化を表現する函数で，赤道に平行な $(n-m)$ 本の節線と m 本の経節線（極を通る大円節線）とをもって球表面を の目（あるいは基盤の目）の形に区分する．よってこの函数を第**n** 階第**m** 次の Tesseral harmonics と呼ぶ．[8]

(7)　zonal harmonics

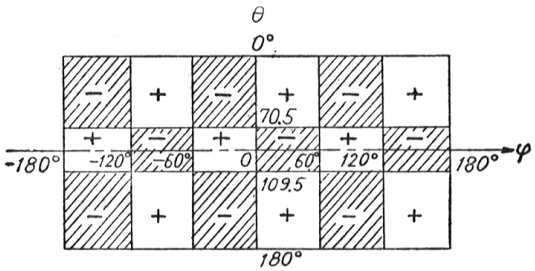
第4・14図には n および m の小さい範囲の節線を示してあるが，n および m が大きくなると第4・15図のようになり，Tesseral という意味が判然とするであろう．



第4・14図　Tesseral harmonics $\sin m\varphi \cdot P_n^m(\cos\theta)=0$ および $\cos m\varphi \cdot P_n^m(\cos\theta)=0$ の表わす節線．

Tesseral harmonics は球面上で完全な直交条件を備えていることが証明され，[9] その結果は

(139)
$$\int_{-1}^{1} P_n^m(x)\cdot P_l^m(x)\,dx = \begin{cases} 0, & (n\neq l), \\ \dfrac{2}{2n+1}\dfrac{(n+m)!}{(n-m)!}, & (n=l), \end{cases}$$



第4・15図　$\sin 3\varphi \cdot P_5^3(\cos\theta)$ の節線．
斜線を施した部分は負となる領域を示す．

(140)
$$\int_{-1}^{1} P_n^m(x)\cdot P_n^l(x)\cdot\frac{dx}{1-x^2} = \begin{cases} 0, & (m\neq l), \\ \dfrac{1}{m}\dfrac{(n+m)!}{(n-m)!}, & (m=l). \end{cases}$$

(8)　tesseral harmonics of　－th degree and　－th order. tesserae は　の目，基盤の目，格子形の意．
(9)　B.W.HOBSON :“ The Theory of Spherical and Elipsoidal Harmonics ” Cambridge Press 1931.

よって球面上の任意の函数 $F(\theta,\varphi)$ は tesseral harmonics で展開することができて

(141)
$$F(\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[a_{n0}\mathrm{P}_n(\cos\theta)+\sum_{m=1}^{n}(a_{nm}\cos m\varphi+b_{nm}\sin m\varphi)\mathrm{P}_n^m(\cos\theta)\right]$$

と表わされる．ここに係数 a_{n0}　a_{nm}　b_{nm} は

(142)
$$a_{n0}=\frac{2n+1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}F(\theta,\varphi)\cdot\mathrm{P}_n(\cos\theta)\cdot\sin\theta\cdot d\theta\, d\varphi,$$
$$a_{nm}=\frac{2n+1}{2\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}F(\theta,\varphi)\cdot\mathrm{P}_n^m(\cos\theta)\cdot\cos m\varphi\cdot\sin\theta\cdot d\theta\, d\varphi,$$
$$b_{nm}=\frac{2n+1}{2\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}F(\theta,\varphi)\cdot\mathrm{P}_n^m(\cos\theta)\cdot\sin m\varphi\cdot\sin\theta\cdot d\theta\, d\varphi.$$

なお

(143)
$$\mathrm{Y}_n(\theta,\varphi)=\sum_{m=0}^{n}(a_{nm}\cos m\varphi+b_{nm}\sin m\varphi)\,\mathrm{P}_n^m(\cos\theta)$$

を第 n 階の球面調和函数 (10) と呼ぶ．

これらの結果より，半径 r なる球面上の任意の点で (81) を満足する球波動函数の第 nm 次成分は

(144)
$$\phi_{\substack{e\\0}nm}=z_n(kr)\cdot\mathrm{P}_n^m(\cos\theta)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}m\varphi\cdot e^{-i\omega t}$$

と書ける．ここに ϕ_{enm} は隅函数，ϕ_{0nm} は奇函数を表わし，$z_n(kr)$ は球函数であり，原点 O で ϕ が有限の場合には球面 BESSEL 函数を用いて

(145)
$$z_n(kr)=\mathrm{j}_n(kr)$$

と表わされ，ϕ が中心を除外した領域で有限でかつ無限遠 $(r\to\infty)$ で消滅する場合には第一種の球面 HANKEL 函数を用いて

(146)
$$z_n(kr)=\mathrm{h}_n^{(1)}(kr)=\mathrm{j}_n(kr)+i\mathrm{n}_n(kr)$$

と表わされるが，(11) 一般には

(147)
$$z_n(kr)=c_n\mathrm{j}_n(kr)+d_n\mathrm{n}_n(kr)$$

の形をとる．よって (81) の一般解は

(148)
$$\phi=\sum_{n=0}^{\infty}\left[c_n\mathrm{j}_n(kr)+d_n\mathrm{n}_n(kr)\right]\left[a_{n0}\mathrm{P}_n(\cos\theta)+\sum_{m=1}^{n}(a_{nm}\cos m\varphi+b_{nm}\sin m\varphi)\mathrm{P}_n^m(\cos\theta)\right]e^{-i\omega t}$$

となる．

(10)　spherical surface harmonics of degree n.

(11)　$+j\omega$ 系の場合には第二種の球面 HANKEL 函数　$\mathrm{h}_n^{(2)}(kr)=\mathrm{j}_n(kr)-j\mathrm{n}_n(kr)$ を用いる．

球座標で表わされる最も単純な波動は対称球面波である．これは（148）の $n=0$ の成分をとり，

(149)　$$d_0 = ic_0$$

とおけば

(150)　$$\phi = c_0\left[\mathrm{j}_0(kr) + i\mathrm{n}_0(kr)\right]e^{-i\omega t} = c_0\,\mathrm{h}_0^{(1)}(kr)e^{-i\omega t}$$
$$\underset{r\to\infty}{\Rightarrow} \frac{c_0}{kr}e^{i(kr-\omega t)-i\frac{\pi}{2}}$$

となり，前に述べた対称球面波と同形の表現を得る．

（148）にて $n=1$ の場合を取り，（149）を用いると

(151)　$$\phi = c_1\left\{\mathrm{j}_1(kr) + i\mathrm{n}_1(kr)\right\}P_1(\cos\theta)e^{-i\omega t} = c_1\mathrm{h}_1^{(1)}(kr)\cdot\cos\theta\cdot e^{-i\omega t}$$
$$\underset{r\to\infty}{\Rightarrow} \frac{-c_1\cos\theta}{kr}e^{i(kr-\omega t)}$$

となり，二重音源より輻射される音場となる．ただし

(152)　$$\mathrm{h}_n^{(1)}(z) \underset{z\to\infty}{\Rightarrow} (-i)^{n+1}\frac{e^{iz}}{z},$$
$$\mathrm{h}_n^{(2)}(z) \underset{z\to\infty}{\Rightarrow} (i)^{n+1}\frac{e^{-iz}}{z}.$$

次に任意の方向に進行する平面波を球波動函数で展開した形を示しておく．波面の伝播方向に測った位相定数をベクトルで表示して k と記すと

(153)　$$k_x = k\sin\alpha\cdot\cos\beta,\qquad k_y = k\sin\alpha\cdot\sin\beta,\qquad k_z = k\cos\alpha$$

である．ここに α は第4・16図に示すように伝播方向 k と z 軸とのなす角，β は k と x 軸とのなす角であり，k_x は x 方向に測った位相定数を表わす．観測点の球座標を (r,θ,φ) とすると，その直角座標 (x,y,z) は

(154)　$$x = r\sin\theta\cdot\cos\varphi,\qquad y = r\sin\theta\cdot\sin\varphi,\qquad z = r\cos\theta$$

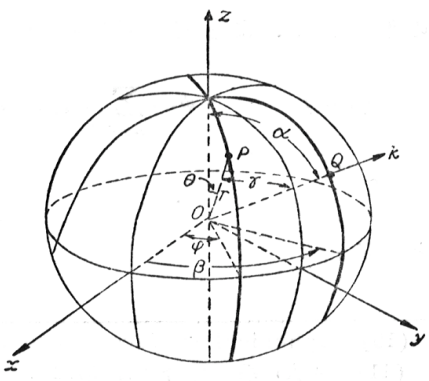
であるから，観測点を示すベクトル $\overrightarrow{OP}$ を r とすれば，k 方向に伝播する平面波の観測点の位相は

(155)　$$\mathrm{k}\cdot\mathrm{r} = kr\left\{\sin\alpha\cdot\sin\theta\cdot\cos(\varphi-\beta) + \cos\alpha\cdot\cos\theta\right\} = kr\cos\gamma$$

である．ここに γ は k と r とのなす角である．平面波の伝播方向が z 軸と一致している場合には $\gamma=\theta$ であり，かつ音場は z 軸に関して対称形を保っているので，(148) を用いて平面波を展開すると

(156)　$$e^{i(kz-\omega t)} = e^{i(kr\cos\gamma-\omega t)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,\mathrm{j}_n(kr)\cdot\mathrm{P}_n(\cos\gamma)\cdot e^{-i\omega t}$$

の形で表わされねばならない．(156) の係数 a_n は（100）を用いて決定することができる．まず（156）を



第4・16図　球座標．

(157)
$$a_n \mathrm{j}_n(kr) = \frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi} e^{ikr\cos\gamma}\cdot \mathrm{P}_n(\cos\gamma)\cdot\sin\gamma\cdot d\gamma$$

と書き，一方（109）を用いて

(158)
$$\left[\frac{d^n \mathrm{j}_n(z)}{dz^n}\right]_{z\to 0} = \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}$$

を作れば，$kr\to 0$ における（157）の値は

(159)
$$\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}a_n = \frac{2n+1}{2} i^n \int_0^{\pi} \cos^n\gamma\cdot \mathrm{P}_n(\cos\gamma)\cdot\sin\gamma\cdot d\gamma$$

となるから，(159) を積分すると

(160)
$$a_n = (2n+1)\, i^n .$$

よって z 軸方向に進行する平面波を (r,γ,φ) 点の球波動函数で展開した形は

(161)
$$e^{i(kz-\omega t)} = e^{i(kr\cos\gamma-\omega t)} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1)\, \mathrm{j}_n(kr)\cdot \mathrm{P}_n(\cos\gamma)\cdot e^{-i\omega t} ,$$

任意の方向に進行する平面波を球面上の点 (r,θ,φ) の球波動函数で展開した形は

(162)
$$e^{i(kr\cos\gamma-\omega t)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{ i^n (2n+1)\, \mathrm{j}_n(kr)\left[\mathrm{P}_n(\cos\theta) + 2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\mathrm{P}_n^m(\cos\alpha)\cdot \mathrm{P}_n^m(\cos\theta)\cdot\cos m\varphi\right]\right\} e^{-i\omega t}$$

となることが示されるが，この証明は省いておく．[12][13]

~~4・8~~　障碍物による音波の散乱

4・3・1　剛体障碍物による散乱

持続平面音波[1]が進行している音場内の波長に比べて小さな剛体によって，音場が乱される様子を解析する方法を次に紹介しよう．[2]

障碍物から充分遠方において散乱波を観測する場合には，障碍物のある位置は

（i）　圧縮や稀薄が生ぜぬこと

（ii）　音波によって障碍物が動揺しないこと

の二つの性格によって特長付けられている．第一の圧縮や稀薄が生ぜぬということは，逆に考えればこの位置には，そこを通る音場とは逆位相で呼吸する呼吸源が存在すると考えられる．[3]　よって障碍

(12)　証明はたとえば HOBSON の著書を参照されたい．

(13)　球波動函数の積分表示，FOURIER-BESSEL の積分等については例えば STRATTON : "Electromagnetic Theory" Chap. III を参照．

(1)　a train of plane sound wave

(2)　散乱 : scattering または diffraction.

(3)　呼吸源の占める領域が音場の波長に比し小さいから，この領域全体が一様に同相で呼吸すると考えることができ，単一呼吸球で代表することかできる．

物の第一の性格は,障碍物を除去してその位置に仮想点音源を置き,その点音源の強さが障碍物のないときのその位置への入射音場の強さと大きさが等しく逆位相で呼吸するものと考えることによって代表できる.障碍物の第二の性格である不動性は二重音源によって代表することができる.その理由は,もしも障碍物が音波によって自由に動き得たとし,さらに障碍物の密度も周囲の媒質と等しかったとすると,波長に比して小さな障碍物は空気粒子と共に動揺し不動性による散乱は現われない筈であるということに基づいている.この障碍物を不動のままに保つためには,障碍物のないときのその位置への入射音場と大きさ等しく逆位相の外力を加えて障碍物を励振しなければならぬ.しかしこのようなものは前節に述べた通り二重音源で代表される.よって音場内の小さな障碍物による散乱波は,障碍物を除去して障碍物のあった位置に単一点音源および二重音源を置いた場合と等価であると考えられる.この場合点音源で代表される散乱波は二重音源で代表されるものに較べて小さいように思われるが,実際は二重音源による音場が横方向の速度成分を生じて能率が低下するために,遠方では両者が同程度の強さとなる.

障碍物の体積を Q とし,障碍物の非圧縮性を代表する点音源の強さを求めて見よう.障碍物がない場合の一次入射波のこの位置の凝縮および速度ポテンシャルを s および ϕ とすると,一次入射波によって生じた圧縮のために障碍物の占める空間の表面を通過する体積速度は

（1）
$$-Q\frac{ds}{dt}=\frac{-Q}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial^2 t}=+k^2Q\phi$$

と書ける.[4] よって(1)の符号を逆転したものが仮想点音源の強さであるとみなすことができる.一次入射波が $+x$ 方向へ進行する平面波である場合には

（2）
$$\phi_0=Ae^{ikx-i\omega t},\qquad p_0(x)=-i\omega\rho_0Ae^{ikx-i\omega t}\qquad(\mathrm{Pa})$$

と表わされるから,障碍物の非圧縮性による散乱波の音場は

（3）
$$\phi_{s1}=-\frac{k^2QA}{4\pi r}e^{ikr-i\omega t}$$

となる.ここに r は障碍物と観測点との距離である.

障碍物の不動性を代表する二重音源の強さを求めるには,障碍物の形が4・2・4で設けた $\overline{ox}$ 軸に関する対称性の仮定を保っているものとし,障碍物は x 方向に進行する一次入射音波(2)によって x 軸方向に励振されるものと仮定する.障碍物のないときの障碍物の中心の位置 O における一次入射音波の粒子速度は

$$\dot{\xi}_x=-ikA$$

であるから,Qなる体積の剛体がこの速度と大きさ等しく逆位相で振動した場合の二重音源の強さは

$$B_0=ik(Q+Q')A$$

（4）　$-\dfrac{d\Delta}{dt}=\dfrac{ds}{dt}=-\nabla\cdot\mathbf{V}$,　体積速度は　$\int_s\mathbf{V}\cdot\mathrm{nda}=\int_v\nabla\cdot\mathbf{V}dv$.

となる．したがって障碍物の不動性を代表する仮想二重音源によって生ずる散乱波の音場は3・5・4の(61) より

(4)　$$\phi_{S2} = \frac{k^2(Q+Q')A\cos\theta}{4\pi r}e^{ikr-i\omega t}$$

となる．

観測点における散乱波の音場は (3) と (4) の合成されたものであるから

(5)　$$\phi_s = \phi_{s1} + \phi_{s2}, \qquad p_s = k^2 Q p_0(0)\left[\left\{1+(Q'/Q)\right\}\cos\theta - 1\right]e^{ikr}/4\pi r \qquad \text{(Pa)}$$

で求められる．よって観測点の音場は一次入射波 ϕ_0 と散乱波 ϕ_s との重畳されたものとして求めることができる．

(3) および (4) を見ると，障碍物から遠方の散乱波の音場の振幅は障碍物の体積 Q に比例し，また波長の平方 λ^2 に反比例することが示され，また障碍物から観測点までの距離 r に反比例している．輻射エネルギーは振幅の平方で与えられるから，散乱による輻射エネルギーはλ^4 に比例する．このことは振動数の高い音ほど散乱の度合が甚だしいことを示し，光の現象に見られる青空の生ずる原因とも同一現象である．太陽からくる光は，大気中の波長に比して小さな微粒子によって散乱されるが，波長の短かい光ほど散乱が甚だしいので，太陽のある方向から観測者に到達する光は波長の長い光が大部分を占めるようになるために比較的赤く見え，太陽のない方向から到達する光は散乱された波長の短い光が大部分を占めるので青く見える．音源と受音体との間に小さな障碍物を置く場合にも全く同様のことがいえる．この事実は Lord RAYLEIGH によって説明されたが，同時に倍音反響 (5) の現象も説明された．基音とそのオクターブ音よりなる合成音を例えば木立または小さな森の傍で発音したとすると，散乱波に含まれる上音と基音との強さの比が発射音に比べて16 倍だけ上音が強められるために散乱波は1オククーブ高められてきこえる．これを倍音反響という．

散乱波の輻射エネルギー流を実際に算出するには，(5)で表わされる音場が遠方を囲む半径 r なる球面上でなす仕事量から求める．この場合，二つの音源の結合作用を示す項は $\cos\theta$ なる因数を含むことになるので全球面に積分すると消滅し，結局二つの音源からの輻射エネルギー流の和の形となる．よって3・5の (36) と (65) を用いて散乱波の輻射エネルギー流を計算すると

(6)　$$\overline{W} = \frac{\rho_0 c k^6 A^2}{8\pi}\left\{Q^2 + \frac{1}{3}(Q+Q')^2\right\} \qquad \text{(W)}$$

となるから，これはさらに

(7)　$$\overline{W} = \frac{k^4 \overline{w}_0}{4\pi}\left\{Q^2 + \frac{1}{3}(Q+Q')^2\right\} \qquad \text{(W)}$$

と表わされる．ただし

(8)　$$\overline{w}_0 = \frac{1}{2}\rho_0 c k^2 A^2 = \frac{1}{2}\frac{p^2}{\rho_0 c} \qquad \text{(W/m}^2\text{)}$$

(5)　harmonic echo

は入射平面波のエネルギー流密度である.

障碍物が半径 a なる剛体球の場合には $Q' = \frac{1}{2}Q = \frac{2}{3}\pi a^3$ であるから（8）は

（9）　$$\overline{W} = \frac{7}{9}(\pi a^2 \overline{w}_0)(ka)^4 \qquad \text{(W)}$$

となる. 一方球に入射する平面波のエネルギー流は $\pi a^2 \overline{w}_0$ であるから, 小さな球から散乱される音波の輻射エネルギー流はその球に入射するエネルギー流のわずか $\frac{7}{9}(ka)^4$ 倍でしかない. たとえば波長1メートルの音波（振動数約 332 c/s が直径1ミリメートルの球にあたる場合には散乱波のエネルギーはその球にあたる一次入射波のエネルギーの大略 7.6×10^{-11} 倍の大きさである.

球の代りに円板を用いるときは $Q' = \frac{8}{3}\pi a^3$, $Q = 0$ であるから散乱波エネルギーは円板面に入射する平面波エネルギーの

(10)　$$\frac{16}{27}(ka)^4 \quad \text{倍}$$

となる.

円筒による散乱はさらに難解であるが, Lord LAYLEIGH の計算の結果によれば, 平面波が半径aなる円筒に入射した場合の散乱波エネルギーは, ka の小さな場合にはほぼ入射エネルギーの

(11)　$$\frac{3}{8}\pi^2(ka)^3 \quad \text{倍}$$

であり, 波長 $\lambda = 1(\text{m})$, $a = 1(\text{mm})$ の場合には

(12)　$$1.15 \times 10^{-7} \quad \text{倍}$$

となる.

障碍物が非常に小さくなると散乱波の大きさは流体の粘性による補正を必要とすることが知られている. これは障碍物と流体との境界面のマサツ抵抗が作用するためであるが, その影響は余り大きなものではない.

障得物のすぐ近傍の速度分布は非圧縮性流動が障碍物の周期を通って流れるのと同様と考えられ, 障得物が球形をしている場合には完全に速度分布を定めることができるが, また次のような近似法でも充分である. いま音場を

(13)　$$\phi = Ae^{ikr\cos\theta} + \frac{B}{r^2}\cos\theta$$

と仮定する. 第一項は入射平面波を表わし, 第二項は kr が小さな場合の二重音源によるポテンシャルである. 粒子速度の法線成分は

(14)　$$-\frac{\partial\phi}{\partial r} = -ik\,A\cos\theta \cdot e^{ikr} + \frac{2B}{r^3}\cos\theta$$

であり, これは球の表面 $r = a$ にて零となる筈である. よって, B は近似的に

(15)　$$B \approx +\frac{1}{2} i k a^3 A$$

と定まる．したがって球の近くの音場は近似的に

(16)　$$\phi = A\left\{1 + ik\left(r + \frac{a^3}{2r^2}\right)\cos\theta\right\}$$

と表わされ，これはほとんど非圧縮性の場合と同様である．球の近傍の圧力は (16) を用いて

(17)　$$p = p_0 + \rho_0 \dot{\phi} = p_0 - i\omega\rho_0\phi$$

となるが，これは障碍物のない場合の中心の音圧

(18)　$$p_0 - i\omega\rho_0 A$$

と比べると微小量 kr だけしか異っていない．また球からの距離 r が a の数倍の所でしかも波長 λ に比べれば球の近傍と見做し得る所の音圧はほとんど入射平面波の音圧に近いことが示される．

4・3・2　密度および弾性の異なる障碍物による散乱

密度 ρ_1，体積弾性率 κ_1 なる媒質 (1) 内に密度 ρ_2，体積弾性率 κ_2 なる媒質 (2) で構成された物体が置かれているとき，媒質 (1) 内を伝播してきた平面波この物体によって散乱される様子を調べてみよう．媒質 (2) で構成された物体は有限の体積 V を有し，その表面は S なる閉曲面で囲まれているものとする（第4・17図）．

媒質 (1) (2) に関係なく，空間内の任意の点の凝縮を s とすると，その点の圧力は

(19)　$$p = p_0 + \kappa s$$

で表わされ，κs は音圧を表わす．κs なる音圧により媒質の微小部分がその平衡の位置 $(x\ y\ z)$ から

(20)　$$\mathbf{r} = \xi\mathbf{i}_x + \eta\mathbf{i}_y + \zeta\mathbf{i}_z$$

だけの変位をしたとすれば，(1) 力の平衡の式は

(21)　$$\rho\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial t^2} = -\nabla(\kappa s)$$

で表わされるが，運動がすべて周期運動であって $e^{-i\omega t}$ なる時間因数で表わされる場合には (21) は

(22)　$$\nabla(\kappa s) - \omega^2\rho\mathbf{r} = 0$$

と書くことができる．媒質内の音波の伝播に損失がないものと仮定すれば ω と位相係数 k，波長 λ および音速度 c との間に

(23)　$$\omega = kc, \qquad c = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho}}, \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

なる関係がある．また (22) には s と $\mathbf{r}$ とが含まれているが，この両者の間には流体の連続方程式

(24)　$$\frac{\partial s}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{V} = 0, \qquad ただし \qquad \mathbf{V} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t}$$

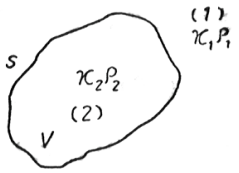
(1)　$\mathbf{i}_x\ \mathbf{i}_y\ \mathbf{i}_z$ はそれぞれ $x\ y\ z$ 方向の単位ベクトル．

から

(25)　$$s+\nabla\cdot\mathrm{r}=0$$

なる関係が求められるので，(22) と連立させれば　s と　r とを決定することができる．

物体（2）のない場合に，媒質（1）内には $-x$ 方向に進行する平面波が存在していたものと仮定する．この一次入射波 (2) の凝縮および変位をそれぞれ s_0 および　ξ_0 で表わすことにすると，s_0 と　ξ_0 の間には



第4・17図

(26)　$$\frac{\partial(\kappa_1 s_0)}{\partial x}-\omega^2\rho_1\xi_0=0\,,$$

(27)　$$s_0=-\frac{\partial\xi_0}{\partial x}$$

なる関係があるので，$-x$ 方向へ進行する音波は

(28)　$$\xi_0=Ae^{-ikx-i\omega t}\,,$$

(29)　$$s_0=+ik\xi_0$$

で与えられる．

障碍物が存在する場合には，その附近の音場は乱されるので (28) (29) のような形の音場ではあり得ない．このことは (28) (29) が媒質（2）と（1）の境界面を含む領域において (22) を満足しないことからも知られる．このような境界を含む領域で (22) を満足するような音場を一次入射波 (28) (29) と関連付けて求めようとするのが当面の目的である．その手段として (22) の解が

(30)　$$s_0+s\,,\qquad \xi_0+\xi\,,\qquad \eta\,,\qquad \zeta$$

の形であると仮定する．(3) (30) が (22) の解であるためには例えば　x 成分を取り出してみれば s と　ξ は

(31)　$$\frac{\partial}{\partial x}\Big[\kappa(s+s_0)\Big]-\omega^2\rho(\xi+\xi_0)=0$$

を満足せねばならぬ．しかるに媒質の境界面においては，κ および ρ はそれぞれ κ_1 から κ_2 におよび　ρ_1 から ρ_2 に急激に変化している．しかしこの変化は薄い層を拡大して見れば，やはり連続的変化と考えて差支えない．よって κ と ρ　とを座標の函数と考えて (31) を展開すれば

(32)　$$\frac{\partial(\kappa s)}{\partial x}-\omega^2\rho\xi+\kappa\frac{\partial s_0}{\partial x}-\omega^2\rho\xi_0+s_0\frac{\partial\kappa}{\partial x}=0$$

となる．しかして (32) から (26) を引いても方程式は成立するから

(33)　$$\frac{\partial(\kappa s)}{\partial x}-\omega^2\rho\xi+(\kappa-\kappa_1)\frac{\partial s_0}{\partial x}-\omega^2(\rho-\rho_1)\xi_0+s_0\frac{\partial\kappa}{\partial x}=0\,,$$

ここに　$(\kappa-\kappa_1)$ および　$(\rho-\rho_1)$は　κ および　ρ の媒質（1）の値からの変化量を表わしているから，

（2）　incidental wave

（3）　この仮定は媒質（1）内の一点　P おける音場が一次入射波　$s_0(P)$　と障碍物による二次波　$s(P)$　との和であると考えることを意味する．この二次波　s　を求めることが目的である．

これを $\Delta\kappa$ および $\Delta\rho$ とおき[4]，形を整理すると

(34)
$$\frac{\partial(\kappa s)}{\partial x}-\omega^2\rho\xi+\frac{\partial}{\partial x}(s_0\Delta\kappa)-\omega^2\xi_0\Delta\rho=0.$$

同様に y，z 成分を計算すると

(35)
$$\frac{\partial(\kappa s)}{\partial y}-\omega^2\rho\eta+\frac{\partial}{\partial y}(s_0\Delta\kappa)=0,$$

(36)
$$\frac{\partial(\kappa s)}{\partial z}-\omega^2\rho\zeta+\frac{\partial}{\partial z}(s_0\Delta\kappa)=0.$$

(34)（35）(36) をまとめると

(37)
$$\nabla(\kappa s)-\omega^2\rho\mathbf{r}+\nabla(s_0\Delta\kappa)-\omega^2\xi_0\Delta\rho\mathbf{i}_x=0.$$

(37) から $\mathbf{r}$ を消去するために，この発散を計算する．この場合

(38)
$$\nabla\cdot(\omega^2\rho\mathbf{r})=\omega^2\left[\mathbf{r}\cdot\nabla\rho+\rho\nabla\cdot\mathbf{r}\right]$$

であるが，$\mathbf{r}$ は微小量であるから，[5] $\nabla\rho$ が微小量とみなせる範囲では $\mathbf{r}\cdot\nabla\rho$ は二次の微小量となり $\rho\nabla\cdot\mathbf{r}$ に比して無視することができ，(37) は

(39)
$$\nabla^2(\kappa s)+\omega^2\rho s=\omega^2\frac{\partial}{\partial x}(\xi_0\Delta\rho)-\nabla^2(s_0\Delta\kappa)$$

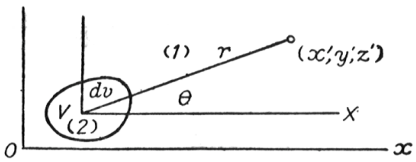
となる．[6] さらに (23) を用いれば

(40)
$$\nabla^2(\kappa s)+k^2(\kappa s)=-\left[\nabla^2(s_0\Delta\kappa)-\omega^2\frac{\partial}{\partial x}(\xi_0\Delta\rho)\right].$$

(40) で定まる κs は

(41)
$$\left[\nabla^2(s_0\Delta\kappa)-\omega^2\frac{\partial}{\partial x}(\xi_0\Delta\rho)\right]$$

を音源の分布函数とする音場であることが3・6を参照すれば容易に知られる．よって領域 (2) 内の点 (x, y, z) にある dv なる体積内の仮想音源による領域 (1) 内の (x', y', z') 点の音場を求め，音波の占める全体積 V にわたり積分すると



第4・18図

(42)
$$\kappa_1 s=\frac{1}{4\pi}\int_V\frac{e^{ik_1 r}}{r}\left\{\nabla^2(s_0\Delta\kappa)-\omega^2\frac{\partial}{\partial x}(\xi_0\Delta\rho)\right\}dv,$$

ただし
$$r=\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)+(z'-z)^2}.$$

(42) の被積分函数は領域 (2) の内では $\Delta\kappa$ と $\Delta\rho$ が値を持つが，領域 (1) 内では消滅する．よって積分範囲は媒質 (2) の占める領域に局限して差支えない．

（4）　κ_1 は一定であるから $\dfrac{\partial\kappa}{\partial x}=\dfrac{\partial(\kappa-\kappa_1)}{\partial x}$ とおき運算す．

（5）　微小振幅の音波の場合を扱っている．

（6）　$\nabla\cdot\mathbf{i}_x=\left(\mathbf{i}_x\dfrac{\partial}{\partial x}+\mathbf{i}_y\dfrac{\partial}{\partial y}+\mathbf{i}_z\dfrac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\mathbf{i}_x=\dfrac{\partial}{\partial x}$ ．

(42) の第一項は GREEN の定理を用いると[7]

(43)
$$\int_V \frac{e^{ik_1 r}}{r}\left\{\nabla^2(s_0\Delta\kappa)\right\}dv$$
$$=\int_V s_0\Delta\kappa\cdot\nabla^2\left(\frac{e^{ik_1 r}}{r}\right)dv+\int_S\left\{\frac{e^{ik_1 r}}{r}\frac{d}{dn}(\Delta\kappa\cdot s_0)-s_0\Delta\kappa\frac{d}{dn}\left(\frac{e^{ik_1 r}}{r}\right)\right\}da$$

と書くことができるが，S が媒質の境界面である場合には，この面上では $\Delta\kappa$ および $\Delta\kappa$ の法線方向の傾度 $\frac{\partial}{\partial n}(\Delta\kappa)$ は消滅しているから第二項は積分に寄与しない．さらに

(44)
$$\nabla^2\left(\frac{e^{ik_1 r}}{r}\right)=\frac{\partial}{r^2\partial r}\left\{r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{ik_1 r}}{r}\right)\right\}=-k^2\frac{e^{ik_1 r}}{r}$$

なることを利用すると，(~~41~~) の第一項は

(45)
$$-\frac{k_1^2}{4\pi}\int_V\frac{e^{ik_1 r}}{r}\Delta\kappa\cdot s_0\,dv$$

とかくことができる．同様に[8] (42) の第二項は

(46)
$$+\frac{\omega^2}{4\pi}\int_V(\xi_0\Delta\rho)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{ik_1 r}}{r}\right)dv\,.$$

よって (42) は

(47)
$$s=\frac{-k_1^2}{4\pi}\int_V\left\{\frac{\Delta\kappa}{\kappa_1}\frac{e^{ik_1 r}}{r}-\frac{1}{ik_1}\frac{\Delta\rho}{\rho_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{ik_1 r}}{r}\right)\right\}s_0\,dv\,,$$

または

(48)
$$s=-\frac{\pi}{\lambda^2}\left[\frac{\kappa_2-\kappa_1}{\kappa_1}\int_V s_0\frac{e^{ik_1 r}}{r}dv-\frac{1}{ik_1}\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1}\int_V s_0\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{ik_1 r}}{r}\right)dv\right]$$

となる．

(48) の第一項は

(49)
$$-\frac{\pi}{\lambda^2}\frac{\kappa_2-\kappa_1}{\kappa_1}s_0\,dv$$

なる点音源から輻射される音場を表わしている．よって障碍物がある場合には，その体積弾性率の相異は，その障碍物の位置に障碍物が無いときに生ずる一次入射音場 s_0 に比例した点音源が生じたかのごとき作用をし，密度の相異は s_0 に比例した二重音源が生じたかのような作用をすることがうかがわれる．しかも二次波の発生する強さは一次波の波長の平方に反比例することが示されている．

障碍物から遠くはなれた点では

---

(7)　GREEN の定理 ： $\int_v(\psi\nabla^2\phi-\phi\nabla^2\psi)dv=\int_s\left(\psi\frac{\partial\phi}{\partial n}-\phi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)da$，
2・2・6 の脚注（3）参照．

(8)　$\nabla\cdot(\phi A)=\mathrm{A}\nabla\phi+\phi\nabla\cdot\mathrm{A}$，　$\int_v\nabla\cdot(\phi\mathrm{A})\cdot\mathbf{n}da$　を用いれば
$\int_v\varphi\nabla\cdot\mathrm{A}dv=-\int_v\mathrm{A}\cdot\nabla\varphi dv+\int_s\varphi\mathrm{A}\cdot\mathbf{n}da$．

(50)
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial x}=\left(ik-\frac{1}{r}\right)\frac{e^{ikr}}{r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}$$
$$=ik\frac{e^{ikr}}{r}\frac{\partial r}{\partial x}\qquad\left(|ik|>\frac{1}{r}\right)$$

とかけるので，r と x とのなす角を θ とし

(51)
$$\frac{\partial r}{\partial x}=-\cos\theta$$

とおくと，[9] (46) は

(52)
$$s=\frac{-k_1^2}{4\pi}\int_V\left(\frac{\Delta\kappa}{\kappa_1}+\frac{\Delta\rho}{\rho_1}\cos\theta\right)s_0\frac{e^{ik_1r}}{r}dv$$

とかける．

また障碍物の大きさが波長に比して小さいときには障碍物の中心の座標を$x_0\ y_0\ z_0$ とすれば V の中では

$$s\cdot\frac{e^{ik_1r}}{r}$$

は中心の値とほとんど変らないとみなすことができるので

(53)
$$s=-\frac{k_1^2}{4\pi}V\left(\frac{\Delta\kappa}{\kappa_1}+\frac{\Delta\rho}{\rho}\cos\theta\right)\left[s_0\frac{e^{ik_1r}}{r}\right]_{x_0,y_0,z_0}$$

となる．したがって小さな障碍物によって生ずる散乱波は，障碍物の体積に比例する．

4・3・3　円筒による散乱音場の一般的解法

円筒に平面波が入射した場合の散乱音場は4・2・6の結果を用いて正確に解くことができる．円筒の軸を z 軸とする円筒座標 (ρ,φ,z) を用い，第4・12図のように軸を定める．一次入射平面波が $+x$ 方向に進行するものとすれば，円筒のない場合の音場は，2・2・6 の（111）を用いて

(54)
$$\phi_0=Ae^{ikx-i\omega t}=Ae^{ik\rho\cos\varphi-i\omega t}$$
$$=A_0\left[\mathrm{J}_0(k\rho)+2\sum_{n=1}^{\infty}i^n\cos(n\varphi)\cdot\mathrm{J}_n(k\rho)\right]e^{iwt},$$

ただし

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{\omega}{c}$$

と表わされるから一次入射波の音圧および径方向の粒子速度は

(55)
$$p_0=-i\omega\rho_0\phi_0,$$

(56)
$$\dot{\xi}_{p0}=-\frac{\partial\phi_0}{\partial\rho}=kA_0\left\{\mathrm{J}_1(k\rho)+\sum_{n=1}^{\infty}i^n\cos(n\varphi)\left[\mathrm{J}_{n+1}(k\rho)-\mathrm{J}_{n-1}(kp)\right]\right\}e^{-i\omega t}.$$

---

(9)
$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{-(x'-x)}{r}=-\cos\theta,$$
$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{+(x'-x)}{r}=\cos\theta.$$

円筒によって散乱される音場は円筒の大きさや表面の形によって規定されるべきものであるが，その散乱音場は円筒を中心とする外向円筒波より構成されると考えられる．よってその一般形は

(57)
$$\phi_s = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos n\phi \left[\mathrm{J}_n(k\rho) + i\,\mathrm{N}_n(k\rho) \right] e^{-i\omega t}$$

と表わされ，この散乱音場の ρ 方向の速度成分は

(58)
$$\dot{\xi}_s = -\frac{\partial \phi_s}{\partial \rho} = k\Big\{ B_0 \left[\mathrm{J}_1(k\rho) + i\,\mathrm{N}_1(k\rho) \right] + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n\varphi \left[\mathrm{J}_{n+1}(k\rho) - \mathrm{J}_{n-1}(k\rho) + i\,\mathrm{N}_{n+1}(k\rho) - i\,\mathrm{N}_{n-1}(k\rho) \right] \Big\} e^{-i\omega t} .$$

円筒が半径 a なる剛体である場合には，一次入射波と散乱波との合成音場の速度の ρ 成分が剛体表面で消滅しなければならない．よって境界条件は

(59)
$$\left[\dot{\xi}_{p0} + \dot{\xi}_s \right]_{p=a} = 0 .$$

(56)（58）および（59）を用いると係数 B_n が定まり

(60)
$$B_n = \mathrm{E}_n (i)^{n+1} A_0 e^{i\gamma n} \sin\gamma_n \quad ,$$

ただし [1]

(61)
$$\tan\gamma_0 = \frac{\mathrm{J}_1(ka)}{\mathrm{N}_1(ka)} \ ,$$

(62)
$$\tan\gamma_n = \frac{\mathrm{J}_{n-1}(ka) - \mathrm{J}_{n+1}(ka)}{\mathrm{N}_{n-1}(ka) - \mathrm{N}_{n+1}(ka)} \quad ,$$

(63)
$$\mathrm{E}_n = \begin{cases} 1, & (n=0), \\ 2, & (n \neq 0). \end{cases}$$

よって x 方向へ進行する平面波が入射する円筒の周囲の音場は

(64)
$$\begin{aligned} \phi &= \phi_0 + \phi_s \\ &= A_0 \Big\{ \mathrm{J}_0(k\rho) + i e^{i\gamma 0} \sin\gamma_0 \cdot \left[\mathrm{J}_0(k\rho) + i\,\mathrm{N}_0(k\rho) \right] \\ &\qquad + \sum_{n=1}^{\infty} i^n \left(\cos n\varphi \cdot \mathrm{J}_n(k\rho) + i e^{i\gamma n} \sin\gamma_n \left[\mathrm{J}_n(k\rho) + i\,\mathrm{N}_n(k\rho) \right] \right) \Big\} \quad , \\ p &= -i\omega\rho\phi , \\ \dot{\xi}_r &= -\frac{\partial \phi}{\partial \rho} \end{aligned}$$

（1）　例えば $n = 0$ の場合は

$$B_0 = \frac{-A_0 \mathrm{J}_1(ka)}{\mathrm{J}_1(ka) + i\,\mathrm{N}_1(ka)} = +i A_0 \frac{\dfrac{\mathrm{J}_1(ka)}{\mathrm{N}_1(ka)}}{\sqrt{1 + \left[\dfrac{\mathrm{J}_1(ka)}{\mathrm{N}_1(ka)} \right]^2 e^{-i\tan^{-1}\left[\mathrm{J}_1(ka)/\mathrm{N}_1(ka) \right]}}} = i A_0 \sin\gamma_0 \cdot e^{i\gamma_0} \ .$$

で与えられる.

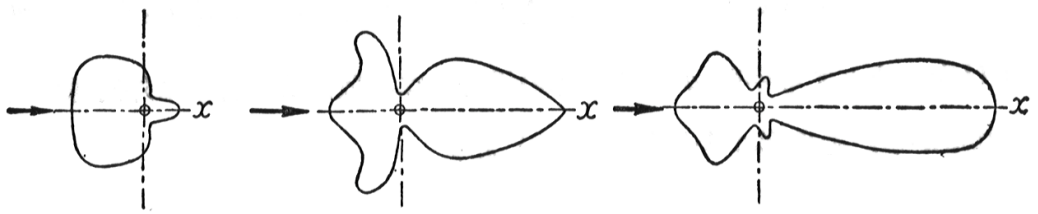
円筒から遠く離れた点では散乱波の音場は (57) と (60) より

$$
\begin{aligned}
&\phi_s \Rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}}\, A_0\, e^{+ik\rho-i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{E}_n \sin\gamma_n \cdot e^{i\gamma n} \cdot \cos n\varphi \cdot e^{-i\left(\frac{2n+1}{4}\right)\pi}, \\
&p_s \Rightarrow -i\omega\rho_0\phi_s, \\
&\dot{\xi}_s \Rightarrow -ik\phi_s
\end{aligned}
\tag{65}
$$

と表わされる. よって単位長の円筒面を貫いて流れ出るエネルギー流密度の時間平均値は

$$
\begin{aligned}
\overline{w}_s &= \frac{1}{2}\Re e\left[\, p_s \cdot \tilde{\dot{\xi}}_s \,\right] \qquad (\mathrm{W/m^2}) \\
&= \frac{\omega\rho_0}{\pi\rho}\left|A_0^2\right| \sum_{n,m=0}^{\infty} \mathrm{E}_n \mathrm{E}_m \sin\gamma_n \cdot \sin\gamma_m \cdot \cos(\gamma_n-\gamma_m) \cdot \cos m\varphi \cdot \cos n\varphi \\
&= \frac{2\overline{w}_0}{k\pi\rho} \sum_{n,m=0}^{\infty} \mathrm{E}_n \mathrm{E}_m \sin\gamma_n \cdot \sin\gamma_m \cdot \cos(\gamma_n-\gamma_m) \cdot \cos m\varphi \cdot \cos n\varphi
\end{aligned}
\tag{66}
$$

と書ける. ここに $\overline{w}_0 = \frac{1}{2}\rho_0 c k^2 \left|A_0\right|^2$ $(\mathrm{W/m^2})$ は平面波のエネルギー流密度である. (66) の $\sum$ の中は輻射エネルギーの指向性を示す函数であり, これを描いて見ると第4・19図のようになる. ま



(a) $\lambda = 2\pi a$　　(b) $\lambda = \frac{2}{3}\pi a$　　(c) $\lambda = \frac{2}{5}\pi a$

第4・19図　半径 a なる円筒によって散乱される音波のエネルギー流密度 $\overline{w}_s$ の指向特性.
矢印は入射平面波の進行方向を示し, 丸印は円筒の大きさを示す.

た (61) (62) の函数は数表ができている.[2]

円筒の半径が波長に比べて小さい場合には $ka \ll 1$ であるから

$$
\begin{aligned}
&\gamma_0 \underset{ka\to 0}{\Rightarrow} \frac{\mathrm{J}_1(ka)}{\mathrm{N}_1(ka)} \approx -\frac{\pi}{4}(ka)^2, \\
&\gamma_1 \underset{ka\to 0}{\Rightarrow} -\left[\frac{\mathrm{J}_0(ka)}{\mathrm{N}_0(ka)}\right] \approx \frac{\pi}{4}(ka)^2, \\
&\gamma_n \Rightarrow 0 \qquad (n>2)
\end{aligned}
\tag{67}
$$

とおくことができ, (66) は

$$
\overline{w}_s = \frac{\pi k^3 a^4}{8\rho}\overline{W}_0 (1-2\cos\varphi)^2 \qquad (\mathrm{W/m^2})
\tag{68}
$$

と表わされる. 円筒から輻射される散乱波のエネルギー流は, 円筒の単位長ごとに

(2)　たとえば MORSE: " Vibration and Sound " 1st ed., p.336.

(69)
$$\overline{W} = \int_0^{2\pi} \overline{w}_s \rho d\varphi$$
$$= \frac{4\overline{w}_0}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{E}_n \sin^2(\gamma_n)$$
$$\underset{ka\to 0}{\Rightarrow} \frac{3}{4}\pi^2 k^3 a^4 \overline{w}_0 \qquad (\mathrm{W})$$

である．一方円筒の単位長に入射する平面波エネルギー流は

(70)
$$\overline{W}_0 = 2a\overline{w}_0 \qquad (\mathrm{W})$$

であるから

(71)
$$\frac{\overline{W}}{\overline{W}_0} = \frac{3}{8}\pi^2 k^3 a^3$$

となり4・3・1に示した Lord RAYLEIGH の結果と一致する．

4・8・4　球による散乱音場の一般的解法

任意の大きさの球により平面波が散乱される場合は円筒による散乱の場合と全く同様の方法で解くことができる．一次入射平面波が $+z$ 方向に進行する場合には，これを球函数で表現すれば，4・2・7の（161）より

(72)
$$\phi_0 = A_0 e^{ikr\cos\theta - i\omega t} = A_0 \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1)\, \mathrm{j}_n(kr)\cdot \mathrm{P}_n(\cos\theta)\cdot e^{-i\omega t}\ .$$

球が座標原点 O を中心とする半径 a なる剛体の[illegible]には，散乱波の音場は外向球面波成分で合成されると考えられるから，その形は4・2・7の（~~126~~）より

(73)
$$\phi_s = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \left\{ \mathrm{j}_n(k_1 r) + i\mathrm{n}_n(kr) \right\} \mathrm{P}_n(\cos\theta)\cdot e^{-i\omega t}$$

と仮定することができ，剛体球の表面 $r=a$ にて

(74)
$$\frac{\partial}{\partial r}(\phi_0 + \phi_s)\Big]_{r=a} = 0$$

を満足せねばならぬ．よって

(75)
$$\sum_{n=0}^{\infty} i^n k A_0 (2n+1)\mathrm{P}_n(\cos\theta)\cdot \mathrm{j}_{n'}(ka)$$
$$+ kB_n \mathrm{P}_n(\cos\theta)\left\{ \mathrm{j}_{n'}(ka) + i\mathrm{n}_{n'}(ka) \right\} = 0$$

これより

(76)
$$B_n = i^{n+1} A_0 e^{i\delta n} \sin\delta_n\ ,$$

ただし

$$\tan\delta_n = \frac{n\mathrm{j}_{n-1}(ka) - (n+1)\mathrm{j}_{n+1}(ka)}{n\mathrm{n}_{n-1}(ka) - (n+1)\mathrm{n}_{n+1}(ka)}\ ,$$
$$ka = \frac{\omega a}{c} = \frac{2\pi a}{\lambda}\ .$$

となるから散乱波の音場は

(77)
$$\phi_s = A_0 \sum_{n=0}^{\infty} i^{n+1}(2n+1)e^{i\delta n}\sin\delta_n \cdot \mathrm{P}_n(\cos\theta)\cdot\left\{\mathrm{j}_n(kr)+i\,\mathrm{n}_n(kr)\right\}e^{-i\omega t},$$

(78)
$$p_s = -i\omega\rho_0\phi_s,$$
$$\dot{\xi}_s = -\frac{\partial\phi_s}{\partial r}.$$

球から遠くはなれた点では

(79)
$$\mathrm{j}_n(kr)+i\,\mathrm{n}_u(kr) \underset{kr\to\infty}{\Rightarrow} \frac{1}{kr}e^{i\left(kr-\frac{n+1}{2}\pi\right)}$$

を用いれば散乱波の音場は

(80)
$$\phi_s = \frac{A_0}{kr}e^{i(kr-\omega t)}\sum_{n=0}^{\infty}e^{i\delta n}(2n+1)\sin\delta_n\cdot\mathrm{P}_n(\cos\theta),$$

(81)
$$\left.\begin{aligned} p_s &= +\frac{\rho_0 c}{r}. \\ \dot{\xi}_s &= +\frac{1}{r}. \end{aligned}\right\} A_0 e^{i(kr-\omega t)}\sum_{n=0}^{\infty}e^{i\left(\delta n-\frac{\pi}{2}\right)}(2n+1)\sin\delta_n\cdot\mathrm{P}_n(\cos\theta)$$

となり, 散乱波のエネルギー流密度は

(82)
$$\begin{aligned} \overline{w}_s &= \frac{1}{2}\Re e\left[p_s\cdot\tilde{\dot{\xi}}_s\right] \\ &= \frac{\rho_0 c\left|A_0\right|^2}{2k^2r^2}\sum_{n,m=0}^{\infty}(2n+1)\cdot(2m+1)\cdot\sin\delta_n\cdot\sin\delta_m\cdot\cos(\delta_m-\delta_n) \\ &\qquad\qquad \cdot\mathrm{P}_n(\cos\theta)\cdot\mathrm{P}_m(\cos\theta) \qquad (\mathrm{W/m^2}), \end{aligned}$$

半径　r なる球面を貫いて外向に流出する散乱波の全エネルギー流は

(83)
$$\begin{aligned} \overline{W}_s &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\overline{w}_s r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi \\ &= \frac{2\pi\omega\rho_0\left|A_0\right|^2}{2k}\sum_{n=0}^{\infty}2(2n+1)\sin^2\delta_n \\ &= \frac{4\pi\overline{w}_0}{k^2}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\sin^2\delta_n \qquad (\mathrm{W}), \end{aligned}$$

ただし

$$\overline{w}_0 = \frac{1}{2}\rho_0 c k^2\left|A_0\right|^2 \qquad (\mathrm{W/m^2})$$

は入射平面波のエネルギー流密度であり，また（83）の積分には4・2・7の（100）を用いている．球に入射する平面波のエネルギーは

(84)
$$\overline{W}_0 = \pi a^2\overline{w}_0 \qquad (\mathrm{W})$$

であるから

(85)
$$\frac{\overline{W}_s}{\overline{W}_0} = \frac{4}{k^2a^2}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\sin^2\delta_n .$$

球が波長に比して小さく，$ka << 1$ の場合には

(86)
$$\tan\delta_0 \approx -\frac{(ka)^3}{3} ,$$

(87)
$$\tan\delta_1 \approx \frac{(ka)^3}{6}$$

であるから

(88)
$$\frac{\overline{W}_s}{\overline{W}_0} = \frac{7}{9}(ka)^4$$

となり 4・3・1の結果と一致する.[3]

なお，$ka << 1$の場合の，球から遠くはなれた点の散乱波の音場を表現する式は (80) (81) (86) (87) より容易に求めることができ，最初の2項を取れば

(89)
$$\phi_s = \phi_{s0} + \phi_{s1} = \frac{k^2a^2A_0}{3r}\left[-e^{i\delta_0} + \frac{3}{2}e^{i\delta_1}\cos\theta\right]e^{i(kr-\omega t)}$$

となる．ここに $e^{i\delta_0}$ と $e^{i\delta_1}$ はほとんど1と見なすことができるので，(89) は 4・3・1の (4) にて

$Q' = \frac{1}{2}Q = \frac{2}{3}\pi a^3$ とおいた結果と一致する．この場合の輻射エネルギー流密度は

(90)
$$\overline{w}_s = \frac{k^4a^6\overline{w}_0}{9r^2}\left(1-3\cos\theta+\frac{9}{4}\cos^2\theta\right) \qquad (\mathrm{W/m^2}) ,$$

輻射エネルギー流は

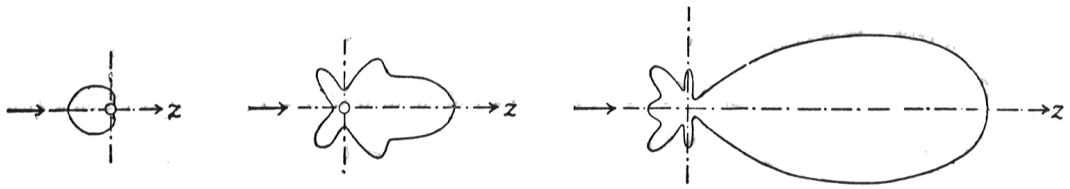
(91)
$$\overline{W}_s = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\overline{w}_s r^2\sin\theta\cdot d\theta\, d\varphi$$
$$= \frac{7}{9}(\pi a^2\overline{w}_0)(ka)^4 \qquad (\mathrm{W})$$

となる.

以上の結果より，(77) の第一項 ($n=0$) は球の非圧縮性を代表する点音源による音場を表わし，第二項 ($n=1$) は球の不動性を代表する二重音源による音場を表わしている．これより類推すれば (77)の第 n 項はn 重音源による音場を表現していることになるが，n の大きな項はka が小さい場合には急速に零に収斂するので，最初の2項を用いれば充分である． ka が1の近傍にある場合には (77) の級数を用いて表現せねばならぬが，この場合には (83) から散乱波エネルギー流密度の指向性を求

(3) MORSE:"Vibration and sound" 1st ed., 1936, p.269 に $\frac{\overline{W}_0}{\overline{W}_0} = \frac{16}{9}(ka)^4$ とあるのは誤りである.

めることができる．その例は第4・20図に求してある．



(a)　$\lambda = 2\pi a$.　　(b)　$\lambda = \frac{2}{3}\pi a$.　　(c)　$\lambda = \frac{2}{5}\pi a$.

第4・20図　半径 a なる球によって散乱される音波のエネルギー流密度 $\overline{w}$ の指向特性．
矢印は入射平面波の進行方向を示し，丸印は球の大きさを示す．

4・4　孔隙から輻射される音波

壁や遮蔽板に小さな孔や隙間がある場合は，音波は容易にその孔を通過して隣の空間に伝播する．このような場合に孔を通過する音場の様相を知っておくことは重要なことであるが，厳密な解はかなり数学的に繁雑なものとなるので，[1] 現象の性質を理解するのに便利な近似隣法を述べることにする．

4・4・1　小さい孔隙の近傍の音場

最も単純な場合は，無限に広い平面状の遮蔽板に小さい孔隙が1個穿たれている場合である．遮蔽板の厚さは孔隙の大きさに比して無視し得る程度に薄く，かつ孔隙の大きさはそこに入射する音源の波長に比して充分に小さいものと仮定する．このような条件は特殊なもののように思われるが，この中に実際問題としてもかなり興味のある問題を含んでいる．

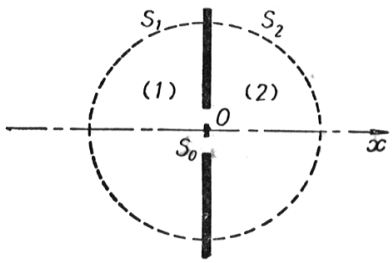
遮蔽板の位置を $x=0$ とし，原点を孔隙（S_0）の中心におく．持続平面音波が左方から入射するものとし

（1）　$$\phi_0 = Ae^{ikx-i\omega t}$$

と表わす（第4・21図）．遮蔽板の両側の音場を区別するために添字 (1) (2) を用いることにし，先ず孔のない完全な剛体遮蔽壁のある空間の音場を求めれば

（2）　$$\phi_1 = A(e^{ikx}+e^{-ikx})e^{-i\omega t}, \qquad (x<0),$$
$$\phi_2 = 0, \qquad (x>0)$$

となる．(2) の ϕ_1 の第二項は遮蔽壁による反射波を表わし，$x=0$ なる面上で $\frac{\partial\phi_1}{\partial x}=0$ となるために必要な項である．

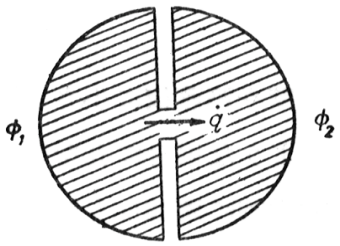


第4・21図

実際問題として，小さな孔隙により音場が乱される範囲は孔 S_0 のごく

（1）H.LEVINE and J.SCHWINGER:"On the Theory of Diffraction by an Aperture in an Infinite Plane Screen"
I．Rev. Mod. Phys., Vol.74, p.953-974, 1948.
II．〃　〃　〃　Vol.75. p.1423-1432, 1949.
H.A.BATHE ： " Theory of Diffraction by a Small Holes" Phys. Rev. Vol.66, p.163-182(1944).

近傍に限られているので，O からやや離れた点で，波長 λ に比べれば近いが，孔の寸法 S_0 に比べれば遠い距離の点では，擾乱は非常に小さくなると考えられる．よってこのような距離の所に仮想面を考え，第4・21図に示すように仮想面 S_1S_2 で孔のある領域を囲んでしまうと，この面で囲まれた領域内では流体は恰も非圧縮流体(2) のように流動し，入射音圧によって $+x$ 方向あるいは $-x$ 方向に流動すると考えられる．よって孔を通る全flux は S_1 と S_2 上の速度ポテンシャルの差に一定の比率を乗じた形で表わされる．(3) このことは電気伝導の現象から類推して理解することができる．いま大きな導体の塊を用い，遮蔽板の位置に相当する所に切り込みを作って絶縁物を挿入したとすると第 4・22 図のような形の導体ができる．これを電気回路として用い，細い頸の部分でつながれた二つの部分に電位差を与えてみる．いま 2部分の静電位を ϕ_1 および ϕ_2 とすれば，頸を流れる定常電流は



第4・22図

（3）　$$\dot{q} = G(\phi_1 - \phi_2)$$

と表わされる．ここに G は頸の電気的コンダクタンスである．流体理論においても速度ポテンシャル ϕ と体積速度 $\dot{q}$ との間に（3）の形が成立し，その場合の G は孔の伝導率(4) と呼ばれ，その単位は長さの単位 $[L]$ である．

孔を囲む二つの面 S_1S_2 上における速度ポテンシャルは近似的に（2）から求められ，

（4）　$$\phi_1 \approx 2Ae^{-i\omega t}, \qquad \phi_2 \approx 0$$

である．よって孔を通り，（1）から（2）に向う体積速度は

（5）　$$\dot{q} = 2GAe^{-i\omega t} \qquad (m^3/s)$$

となる．（5）は孔から空間（2）に輻射される音場の音源となる仮想点音源の強さと考えられるが，これと同じだけの体積速度が孔から空間（1）の方へも対称的に流れるものと考えられるので，小さい孔の効果は境界面のない空間内にある $4GAe^{-i\omega t}$ なる強さの単一点音源による音場で表現できる．よって音場は対称球面波となり，（2）側の音場は

（6）　$$\phi_2 = \frac{GA}{\pi r} e^{i(kr-\omega t)}, \qquad (x>0),$$

（1）側の音場は

（7）　$$\phi_1 = A\left[e^{ikx} + e^{-ikx} - \frac{G}{\pi r} e^{ikr}\right] e^{-i\omega t}, \qquad (x<0)$$

（2）　領域が波長に比して小さい場合 ： 3・4 および 3・5・5参照．

（3）　音圧と速度ポテンシャルとは $p = -i\omega\rho_0\phi$ のなる関係にあるから．孔を通る全 flux が S_1 と S_2 との音圧の差に比例すると考えるのと同意義である．

（4）　conductivity of aperture, Lord RAYLEIGH ："Theory of Sound" Ⅱ．頸を通る流体の運動のエネルギーは Chap.XVI. § 304にあり，

$$T = \frac{1}{2}\rho_0 \frac{\dot{q}^2}{G} = \frac{1}{2}\rho_0(\phi_1 - \phi_2)\dot{q}. \qquad \therefore\ \dot{q} = G(\phi_1 - \phi_2).$$

となる．ただし r は孔の中心 O から観測点までの距離である．

孔から (2) 側へ輻射されるエネルギー流は O にある $4GA$ なる強さの点音源による輻射エネルギー流の半分と考えられるから 3・5・4 の (45) より

(8)
$$\overline{W}_2 = \frac{\rho_0 c k^2 G^2 A^2}{\pi} = \frac{2}{\pi} G^2 \overline{w}_0 \qquad \text{(W)}$$

となる．ここに $\overline{w}_0 = \frac{1}{2}\rho_0 c k^2 A^2$ は一次入射波のエネルギー流密度である．(8) にて $\frac{\overline{W}_2}{\overline{w}_o} = \frac{2G^2}{\pi}$ が波長 λ に無関係であることは，λ が孔の寸法に比して充分大きな範囲では孔から輻射されるエネルギー流は波長に無関係に一定であって，ただ入射エネルギー流密度 $\overline{w}_0$ にのみ比例することを意味している．

孔の導伝率 G は孔の幾何学的の形状によって定められるが，任意の形の孔の導伝率を見出すことは困難な場合が多い．理論的に導伝率を求めることのできる一つの場合は楕円形の孔の場合である．[5] ~~長袖~~の半分が a 離心率が e なる楕円形の孔の導伝率は

(9)
$$G = \frac{\pi a}{F(e)} \text{(m)},$$

ただし

(10)
$$\mathrm{F}(e) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}}$$

は第一種完全楕円積分である．特に半径 a なる円形の孔の場合には

(11)
$$e = 0, \qquad F(e) = \frac{\pi}{2}$$

となるから

(11)
$$G = 2a.$$

また e が小さい場合には

(12)
$$\mathrm{F}(e) = \frac{1}{2}\pi\left\{1 + \frac{1^2}{2^2}e^2 + \frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4^2}e^4 + \cdots\right\}$$

と表わされるが，一方楕円の面積は

(13)
$$S_0 = \pi a^2\sqrt{1-e^2}$$

であるから (9) は

(14)
$$\frac{1}{G} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\pi}{S_0}\right)}\,\frac{2\mathrm{F}(e)(1-e^2)^{\frac{1}{4}}}{\pi}$$

と表わされる．しかるに (12) より

(5)　Lord RAYLEIGH:"Theory of Souod" II，§306.
HELMHOLTZ :(Crelle, Bd. 57,1860)楕円形の孔のある共鳴器を扱っている．

(15)
$$\frac{2\,\mathrm{F}(e)\cdot(1-e^2)^{\frac{1}{4}}}{\pi}=1-\frac{e^4}{64}-\frac{e^8}{64}+\cdots$$

となるから

(16)
$$G\approx 2\sqrt{\frac{S_0}{\pi}}\left(1+\frac{e^4}{64}+\frac{e^8}{64}+\cdots\right).$$

この結果を見ると，離心率 e の小さい楕円孔の導伝率はそれと面積の等しい円孔の導電率とほとんど変らないことが知られる．このことは離心率 e を変化させた場合の (14) の G を~~求めて~~見るとさらに明瞭になる．第4・2表は $e=\sin\psi$ とおいて

(17)
$$G=2\sqrt{\frac{S_0}{\pi}}\,\frac{\pi}{2\sqrt{\cos\psi}\;F(\sin\psi)}$$

を計算した表である．ここに b は短軸の半分を表わし，また表の最右列は円の場合と楕円の場合との G の比を示している．

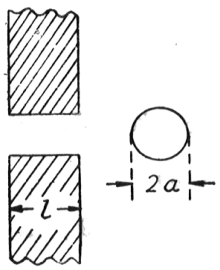
第4・2表　楕円孔の導伝率を計算する数表 [RAYLEIGH]

ψ	$e=\sin\psi$	$\frac{b}{a}=\cos\psi$	$\frac{\pi}{2\,\mathrm{F}(e)\cdot(1-e^2)^{\frac{1}{4}}}$
0°	0.00000	1.00000	1.00000
20	0.34204	0.93969	1.0002
30	0.50000	0.86603	1.0013
40	0.64279	0.76604	1.0044
50	0.76604	0.64279	1.0122
60	0.86603	0.50000	1.0301
70	0.93969	0.34202	1.0724
80	0.98481	0.17365	1.1954
90	1.00000	0.00000	∞

遮蔽板の厚さが孔の大きさに比して無視できない場合には，その長さを l とし，孔の形を半径 a なる円形とすれば，導伝率は

(18)
$$G=\frac{\pi a^2}{l+\frac{\pi}{2}a}\qquad(\mathrm{m})$$

である（第4・23図）．



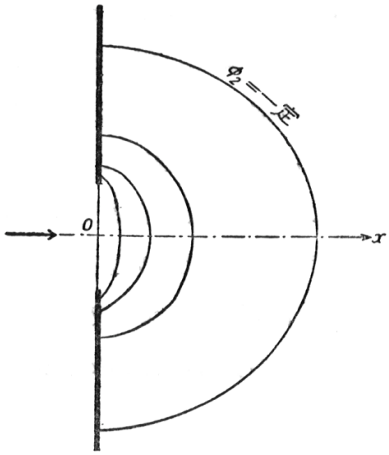
第4・23図

円からわずかに異なる任意の形の孔の導伝率は，それと面積の等しい円の導伝率で近似することができる．これは円形が極大極小論における安定な形[6]を意味していることによる．また（8）と（11）より，円形（またはほとんど円形）の孔から輻射されるエネルギー流は，その孔の面積 πa^2 の中に入射する一次平面波のエネルギー流の $\frac{8}{\pi^2}$（または 0.816）倍に相当することが示される．このことは，波長に比較して充分

(6)　stationary　form

に小さい範囲では，孔の寸法と等しい大きさの円板状障碍物によって散乱される音波の輻射エネルギー流4・3の（10）に比して，孔から輻射されるエネルギー流は非常に大きいことを示している．

第4・24図は円孔から輻射される音場の孔の近くの等圧面（p_2＝一定）の形を示している．等圧面の間隔はϕ_2 の差が一定となるように描いてある．これを見ると，孔から少し遠方の音場は球面波と仮定して差支えないことが理解できよう．空気粒子の振動方向はこの等位面に直角である．



第４・24図　小円孔から輻射される音場の等圧面，矢印は入射平面波の進行方向．

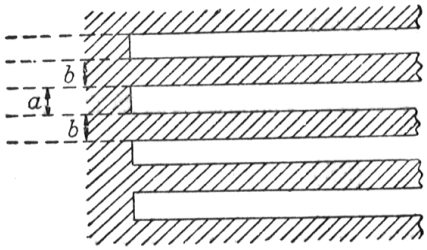
孔の問題として興味あるものに細隙[7] がある．ここではその結果のみを示すことにする．細長い細隙の幅が波長に比して小さい場合に，この細隙から輻射される音波のエネルギー流は，この細隙面に入射する一次入射平面波のエネルギー流と同程度あるいはそれを凌ぐ量となる．さらに第4・25図のように薄い遮蔽膜上に等しい寸法の細隙を等間隔で平行に何本もならべた場合には，透過エネルギー流と細隙面上に入射するエネルギー流との比は

(19)　$$\frac{1}{1+k^2l^2}$$

の形で与えられる．ここに

(20)　$$l=\frac{a+b}{\pi}\ln\sec\left[\frac{\pi b}{2(a+b)}\right]\quad(\mathrm{m}),$$

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}\quad(\mathrm{rad/m})$$



第4・25図　平行に並んだ細隙．

であり，a は細隙の幅，b は細隙間の遮蔽板の幅である．数値例として波長が相隣る細隙間隔の10倍すなわち

(21)　$$\lambda=10(a+b)$$

であり，膜面上の細隙の開口面積が膜の全面積の $\frac{1}{10}$ である場合に，(19) を用いて，細隙から透過するエネルギー流と膜全面に入射するエネルギー流との比を求めると約88%となる．

円形断面の棒（半径 b）を軸間隔 a で何本も平行にならべた格子の場合には，(19) の l の値は

(22)　$$l=\frac{\pi b^2}{a}\quad(\mathrm{m})$$

となる．ただし $\frac{b}{a}$ は $\frac{1}{4}$ より大きく取らぬことを条件とする．

4・4・2　大きな孔または障碍物による散乱音場

波長に較べて小さい孔隙を通過した音波は，恰も単一点音源から輻射されたかのような球面波となることは前節で説明した．しかし波長の短かい高周波音波は，恰も光線が孔から暗室に入射するとき

(7)　slit

に見られるように,孔の形のビームとなって透過したり,あるいは障碍物の影を生じたりする場合が想像される.実際問題としても,最近の電気音響機器は超高音部まで自由に発生できるようになったので,上述のような問題に遭遇する機会も多い.よってこのような場合の音場について述べておく.

前節と同様に,遮蔽壁の平面を $x=0$ とし, $x>0$ の範囲の空間(2)内の音場を考えることにする.この空間内に音源がなく,かつ壁が剛体の場合にはこの空間内にある擾乱はすべて時間と共に縮減してしまい,結局この空間内には音場は存在しなくなる.よってこの空間内に定常音場が存在するためには,音源が存在するか,さもなければ壁面が振動していなければならぬ.空間内には音源が存在せず,その壁面が振動する場合には壁面上のすべての点の法線方向の速度成分が与えられれば,空間(2)内の音場は定められる.空間(2)内の任意の点の速度ポテンシャルを ϕ とし,壁平面 $(x=0)$ 上の任意の微小面積 δa 上の外向法線を n とすれば, δa の振動によって生ずる外向 flux は

(23)
$$\delta\dot{q} = -\frac{\partial\phi}{\partial n}\delta a$$

であるから,同じ大きさのflux が $-n$ 方向へも流出するものと考えれば, da なる部分は遠方から見た場合には,

(24)
$$2\delta\dot{q} = -2\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)\delta a$$

なる強さの点音源で置換できる.よって δa の振動によって δa から r だけ離れた点 P に生ずる音場は

(25)
$$\delta\phi(P) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial\phi}{\partial n}\delta a\cdot\frac{e^{ikr}}{r},$$

全壁面の振動によって p 点に生ずる音場は

(26)
$$\phi(P) = -\frac{1}{2\pi}\int_S\frac{\partial\phi}{\partial n}\cdot\frac{e^{ikr}}{r}da$$

と表わされる.ここに S は壁面の振動する部分の全部を含む面積である.(26)は面 S 上の $\frac{\partial\phi}{\partial n}$ の分布函数が与えられれば,空間内の任意の点の音場が定められることを示す一般式である.

空間(2)内の音場は,壁面上の速度分布 $-\frac{\partial\phi}{\partial n}$ の代りに壁面上の音圧分布にしたがって速度ポテンシャル ϕ の分布が与えられても決定することができる.いま振動する壁平面の代りに,非常に薄くかつ質量のない平面膜を仮想し,この膜の単位面積毎に $X=X_0e^{-i\omega t}$ なる起振力が膜面の法線方向に作用して膜の振動を持続するものと仮定すると,膜面上の任意の微小部分 δa に作用する局部起振力は $X\delta a$ と表わされるから,4・2・3 の(29)および(28)より, $X\delta a$ によって δa から r なる距離の点 P に生ずる音場が求められ

(27)
$$\delta\phi(P) = \frac{-i}{4\pi}\frac{X\delta a}{\rho ck}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right).$$

一方膜面の両側の音圧の和と単位面積毎の印加起振力 X とは平衡していなければならぬから

(28)
$$X = -i2\omega\rho_0\phi,$$

よって全膜面の振動によって P 点に生ずる音場は

(29)
$$\phi(P) = -\frac{1}{2\pi}\int_S \phi \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) da\,.$$

(29) は壁面 上の速度ポテンシャル ϕ の分布が与えられた場合に，空間（2）内の音場を決定する一般式であり，(26) と同じ現象を表現しているものである．

(26) および (29) の積分の形は，HUYGENS の原理が光学に応用されて波頭面の各部分から発生すると想像される二次波の合成によって任意の点 P の擾乱を求めようとする方法に用いられたものである．この波頭面から発する二次波の性格，殊にその指向特性について，一時は多くの議論が行われたのであるが，現在ではこの問題が数学的に見て1個の解しか有しないというものではなく，幾つもの解を有していることが知られている．したがって (26) と (29) の両方は，ともに正しい解を与えるものであり，また場合によっては両者の解を任意の割合で合成したものをも解として用いることがある．[1]

剛壁面に S_0 なる面積の孔が存在する場合には，(26) の $\frac{\partial\phi}{\partial n}$ が値を有する範囲は S_0 の上だけであって，他のすべての壁平面 $(x=0)$ 上では $\frac{\partial\phi}{\partial n}=0$ である．この場合に，さらに孔が波長に比べて小さければ，孔から波長に比べて遠い距離から見た場合の函数 $\frac{e^{ikr}}{r}$ は孔面上で余り変化をしない．よって (26) は

(30)
$$\phi(P) = -\int_{S0} \frac{\partial\phi}{\partial n} da \cdot \frac{e^{ikr}}{2\pi r}$$

と表わされ，(30) の最初の因数は S_0 を通る全 flux となっているから，4・4・1の結果と一致する．

(26) または (30) の $-\frac{\partial\phi}{\partial n}$ は，実際には，壁平面の作用によって影響を受けた状態にある流体の速度の法線成分である．既に述べた比較的小さい孔の場合でも，孔面上の法線方向速度成分の分布状態は入射平面波のみによって孔面上に生ずるものとかなりの相異がある．この速度分布は，平面波が円孔に入射する場合には，静電位分布から類推して決定した例を既に示してある．半径 a なる円形孔上の法線方向の速度成分の分布は

(31)
$$-\frac{\partial\phi}{\partial n} = \frac{D}{\sqrt{a^2-\rho^2}}$$

で表わされる．ここに ρ は円孔面上の任意の点と，その中心との距離である．これを見ると速度分布は孔に縁に近づくにしたがって大きくなり，$\rho = a$ にて無限大となる．[2] しかし孔面上の全 flux を計算する積分には縁の方は余り寄与しないので全 flux は

(32)
$$-\int_0^a \frac{\partial\phi}{\partial n} \cdot 2\pi\rho\, d\rho = 2\pi a D$$

（1）　この問題の歴史的の論争については Lord RAYLEIGH の著書参照．
（2）　壁に厚さを附加し，かつ角に丸味をつければ無限大にならぬ．

となるが，小円孔に平面波が入射する場合には，孔面を通る全 flux は (5) で与えられるから (32) と比較すると

(33)
$$D = \frac{2}{\pi} A .$$

一方，波長が非常に短かくて一波長の長さが孔の寸法のきわめて微小な部分にしか相当しないような極限の場合には,孔面上の法線方向速度分布が壁面によって影響を受けるのは縁から数波長の範囲内であって,孔面の大部分の速度分布は入射平面波によって与えられ

(34)
$$-\frac{\partial \phi}{\partial n} = -ikA$$

となる．孔面上の全 flux を求める積分には線の近傍の影響は無視できるので（26）は

(35)
$$\phi(P) = \frac{-ikA}{2\pi} \int_{S_0} \frac{e^{ikr}}{r} da .$$

この積分は“ FRENSNEL's zones” 等で光学ではよく用いられるものである．この結果は，孔の縁を通りこれと直交する母線で囲まれた筒形の領域内では音場の振幅がほとんど一様であり，その外の領域では振幅がほとんど零となり，かつ筒形の境界面の近くでは，内側も外側もともに回折効果が現われることが示される．この現象は特に光学においてよく研究されている．

薄い平面状の板によって乱される音場を求めるのにもこの方法は有効である．薄板のある位置を $x=0$ とし，板面の法線方向を x 軸とする．入射平面波は $+x$ 方向に進行するものとすれば，薄板の影響を受けた音場の速度ポテンシャルは

(36)
$$\phi = Ae^{ikx} + \phi_s$$

と表わされる．ここに ϕ_s は薄板が入射平面波の速度と等しいが逆位相の速度でその法線方向に振動するものと仮定したときの振動速度 $+ikA$ によって空間内に生ずる速度ポテンシャルであり，平面 $x=0$ に関して対称な2点における ϕ_s の値は大きさ等しく位相が互に逆である．よって（29）を用いれば $x>0$ の領域では

(37)
$$\phi_s(P) = -\frac{1}{2\pi} \int_{S_0} \phi_s \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) da ,$$

ただし S_0 は薄平板の面積である．(37) は薄平板の $+x$ 側の面上の ϕ_s の値が与えられていれば (2) 内の音場が定まることを示している．

薄平板の大きさが波長に比して小さい場合の音場の乱れは4・3・1の（10）で示した通りであって，同じ形の孔の場合と比べると散乱エネルギーが非常に小さいことは既に述べてある．

薄板の大きさに比して波長が非常に小さい極限の場合には，薄板の $+x$ 側面の近くの速度ポテンシャル ϕ_s （したがって音圧 $-i\omega\rho_0\phi_s$ ）は，縁のわずかの部分を除けば，前記の無限に広い振動する平板の場合と同様であると考えられ，

(38)
$$\phi_s = -Ae^{-ikx}$$

とおくことができる．よって (37) は充分な精度をもって

(39)
$$\phi_s(P)=\frac{A}{2\pi}\int_{S_0}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)da$$

と表わすことができる．(36) と (39) とを用いると，薄板の背後（$+x$ 側）に音の影の部分の現われることが示される．薄板から遠方にて $kr>>1$ の場合には (39) は

(40)
$$\phi_s(P)=\frac{ikA}{2\pi}\int_{S_0}\frac{e^{ikr}}{r}\cos\theta\cdot da$$

と書けるが，薄板の法線方向では $\cos\theta\approx 1$ となるから (40) は (35) と符号を除いて同形となる．すなわち，波長に比して充分大きい薄板によって生ずる音場の乱れは，それと同じ寸法の孔を通過する音波によって生ずる音場と完全に逆の形をしていることが示される．[3] このような現象は，比較的高周波音がかなり大きい物体に入射した場合，またはかなり大きい孔を通過する場合に生ずる．

以上の理論はかなり直観的な考察の下に組立てられているから，できることなら厳密な解と比較して見ることが望ましい．これらの問題に関する正確な解は例えば SOMMERFELD (1895) が直線状の辺を有する平板に入射する平面波の反射音場，縁を廻って透過する音場，背後の影と影の境界部の回折などについて解いている．その結果は上記の理論と実用上の範囲内で一致している．

4・4・3　RAYLEIGH 板

音場の強さを測定する唯一の絶対測定法として広く知られている方法に，音場内に小さな円板を吊し音波により円板が偶力を受けて回転する角度から音場の粒子速度を知る方法がある．この装置を RAYLEIGH 板と呼ぶ．

円板を糸で吊してこれに流体の流れを当てると，円板の面を流れと直角な方向に向けようとする偶力が生じ，円板面の方向はこの偶力と糸の埃れによる反撥力が平衡する角度に保たれる．この偶力の大きさに対して初めて理論式を与えたのは KONIG [1] である．これは

（i）　非圧縮性理想流体の渦なしの運動であること，

（ii）　音波の波長 λ は円板の半径 a に比して充分大きいこと，

（iii）円板は偏平楕円体 [2] でその厚さは半径に比して充分小さい剛体であること，

（iv）　円板の重心は動かないこと，

という仮定の下に平面波が到来したときの偶力を計算した．その結果によれば，x を平面波の進行方向とし，θ を円板面の法線と x 軸とのなす角とするとき，偶力 M は

(41)
$$M=\frac{4}{3}\rho_0 a^3\left|\Xi\right|^2\sin 2\theta \qquad (\mathrm{N\cdot m})$$

（3）　バビネの原理という．光学ではよく知られている原理である．J.BABINET はフランスの物理学者．

（1）　R.KONIG : Ann.der phys., Vol.43.p.43 (1891).

（2）　oblate spheroid

で表わされる．ここに $\Xi = \frac{1}{\sqrt{2}}\dot{\xi}$ は円板のないときの音場の粒子速度の実効値 を示す．音の強さは3・5・5の（90）より

(42)
$$\overline{w} = \frac{1}{2}\rho_0 c\left|\dot{\xi}\right|^2 = \rho_0 c\left|\Xi\right|^2 \qquad (\mathrm{W/m^2})$$

と表わされるから，(41) は

(43)
$$M = \frac{4}{3}\frac{a^3}{c}\overline{w}\sin 2\theta \qquad (\mathrm{N\cdot m})$$

となり，M を測定すれば $\overline{w}$ ，したがって Ξ を知ることができる．(43) の M は $\theta = 45^\circ$ のとき最大であり，このときの M を測定すればその大きさは

(44)
$$M \propto \frac{a^3}{c}\overline{w} \qquad (ka << 1)$$

である．

音波の波長が比較的小さい範囲まで正しく M を表わす式は小谷[4] によって与えられ，ka の小さな範囲で

(45)
$$M = M_0\left\{1+\frac{1}{5}(ka)^2\left(1+\frac{1}{3}\cos 2\theta\right)\right\}$$

である．ここに M_0 は (41) または (43) による KONIG の値である．

円板の重心が動く場合[4] をも考えると，KING[5] によれば ka の小さなとき

(46)
$$M = M_0\left[\frac{m_1\left\{1+\frac{2}{5}(ka)^2\cos^2\theta\right\}}{m_1+m_0\left\{1+\frac{1}{5}(ka)^2\right\}} - \frac{2}{15}\frac{\frac{m_1 a^2}{4}(ka)^2}{\frac{ma}{4}+\frac{2}{15}m_0 a^2}\cos 2\theta\right],$$

ただし　$m_0 = \frac{8}{3}a^3\rho_0$ ，　m_1 は円板の質量

である．また WOOD[6] によれば，$\theta = 45^\circ$ の場合に

(47)
$$M = M_0(1-\beta)^2$$

ここに
$$1-\beta = \frac{m-m'}{m+\frac{4}{3}a^3\rho_0}$$

ただし m' は円板が排除した流体の質量である．

実際に RAYLEIGH 板を用いる場合には，これを管の内に設けて気流その他の影響を防ぐ必要があ

---

(3)　root mean square value, effective value.

$$\Xi = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \dot{\xi}^2 dt}$$

(4)　小谷（正雄）：数物記事，Vol. 15, p. 30 (1933).

(5)　L. V. KIN　：Proc. Roy. Soc., Vol. 153, No. 1, p. 17　(1936).

(6)　A. B. WOOD　：Proc. Phys. Soc., Vol.47, p.357　(1935).

る．この場合の壁の影響を友近[7]は幅が D なる溝の中に二次元の定常流を考え，溝の中央に固定された長さ $2a$ なる平板の受ける偶力を計算することによって補正した．その結果は $\theta = 45^\circ$ の場合に

$$\frac{M}{M} = 1 + 0.41123\left(\frac{2a}{D}\right)^2 + 0.24733\left(\frac{2a}{D}\right)^4 + 0.11959\left(\frac{2a}{D}\right)^6 + \cdots \tag{48}$$

である．ここに M_1 は壁の影響のないときの偶力である．この結果，壁は偶力を大きくする作用があるが

$$\frac{D}{2a} > 4$$

であればその影響はほとんど無視できる．

以上の RAYLEIGH 板の理論にはすべて粘性は考えられていない．

4・5　共鳴器および音響管

空洞および管が音響の共鳴器(共振器)[1]として昔から広く用いられていることは楽器の構造などから理解できるであろう．しかしこれに対する解析とその理論的説明は比較的新しく，18 世紀頃からようやく試みられるようになった．[2]ここで述べようとする部分はしたがって，音響理論を応用せんとする者にとっては重要な部分に属するが，紙面の関係から余り詳しく述べることはできないのでその要点のみを記しておく．詳しくは専門書によって学ばれることを望む．

剛壁で囲まれた空洞内の音場は音波の一般式

$$\nabla^2\phi + k^2\phi = 0 \tag{1}$$

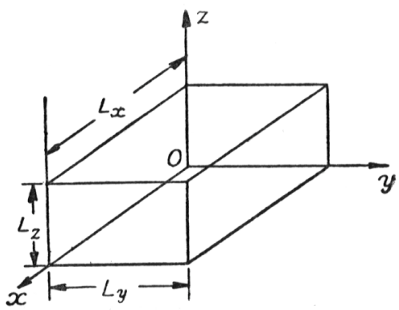
を満足し，かつ空洞壁面で粒子速度の法線方向成分が

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \tag{2}$$

となるような解を求めることによって決定することかできる．したがってその解法は空洞壁の形状によってそれぞれ異なるものとなる．

4・5・1　矩形空洞の規準振動姿態

剛壁で囲まれた矩形空洞の3稜の長さが $L_x\ L_y\ L_z$ である場合に空洞内の音波の規準振動姿態を決定するには，第4・26図のように座標原点を空洞の隅において直角座標 (x, y, z) を採用し，(1) を変数分離法で解く．境界条件 (2) は，短形空洞の場合には



第4・26図　短形空洞.

$$x = 0 \quad \text{および} \quad x = L_x \quad \text{にて} \quad \dot{\xi}_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x} = 0,$$

$$y = 0 \quad \text{および} \quad y = L_y \quad \text{にて} \quad \dot{\xi}_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y} = 0,$$

(7)　友近（晋）：数物記事，Vol.19，p.329 (1937).
(1)　tesonator
(2)　HELMHOLTZ による．

$$z=0 \quad \text{および} \quad z=L_z \quad \text{にて} \quad \dot{\xi}_z=-\frac{\partial\phi}{\partial z}=0$$

と表わされるので，(1) の解は

（3）
$$\phi=\sum_{n,m,s} A_{nms}\cos\left(\frac{n\pi}{L_x}x\right)\cdot\cos\left(\frac{m\pi}{L_y}y\right)\cdot\cos\left(\frac{s\pi}{L_z}z\right)\cdot\cos(\omega_{nms}t-\varphi_{nms}),$$

ただし

$$n=0,1,2,3,\cdots,\qquad m=0,1,2,3,\cdots,\qquad s=0,1,2,3,\cdots$$

であり第 nms 次規準振動姿態の固有値は

（4）
$$k_{nms}=\frac{\omega_{nms}}{c}=\pi\sqrt{\left(\frac{n}{L_x}\right)^2+\left(\frac{m}{L_y}\right)^2+\left(\frac{s}{L_z}\right)^2}\qquad(\mathrm{rad/m}),$$

その規準振動数は

（5）
$$\nu_{nms}=\frac{\omega_{nms}}{2\pi}=\frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{n}{L_x}\right)^2+\left(\frac{m}{L_y}\right)^2+\left(\frac{s}{L_z}\right)^2}\qquad(\mathrm{Hz}).$$

この結果は短形膜の親準振動姿態と似ており，z 方向に波動現象の現われない $s=0$ の姿態は短形膜の場合と同形となる．さらに y 方向にも波動現象の生じない場合（ $s=0$ にしてかつ $m=0$ ）には両端の閉鎖した管の規準振動姿態と同じ形となる．

4・5・2　球形空洞の規準振動姿態

球形空洞内の音場は4・2・7の結果を用いれば直ちに求めることができる．球の中心を座標原点とする球座標（r,θ,φ）を採用すれば,球の内部に音源のない場合には中心で有限な解を用いて音場を表わすことができるから，4・2・7の（148）は

（6）
$$\phi=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{j}_n(kr)\left[a_{n0}\mathrm{P}_n(\cos\theta)+\sum_{m=1}^{n}(a_{nm}\cos m\varphi+b_{nm}\sin m\varphi)\cdot\mathrm{P}_n^m(\cos\theta)\right]\cos\omega t.$$

また境界条件 (2) は

$$r=a \quad \text{にて} \quad -\frac{\partial\phi}{\partial r}=0$$

と表わされるから (6) より

（7）
$$\mathrm{j}_{n'}(ka)=0,$$

（8）
$$k_{ns}=\frac{\nu_{ns'}}{a},$$

ここに $\nu_{ns'}$ は $\mathrm{j}_{n'}(x)=\dfrac{\partial\mathrm{j}_n(x)}{\partial x}=0$ の第 s 番目の根である．よって球形空洞の規準振動姿態は

（9）
$$\phi_{ns}=\mathrm{j}_n\left(\frac{\nu_{ns'}}{a}r\right)\left[a_{n0}\mathrm{P}_n(\cos\theta)+\sum_{m=1}^{n}(a_{nm}\cos m\varphi+b_{nm}\sin m\varphi)\mathrm{P}_n^m(\cos\theta)\right]\cdot\cos(\omega_{ns}t-\alpha_{ns})$$

となる．　n の小さい範囲では

(10)
$$\phi_{0s} = a_0\, \mathrm{j}_0(k_{0s}r)\cos(\omega_{0s}t-\alpha_{0s}),$$
$$\phi_{1s} = \mathrm{j}_1(k_{1s}r)\left[a_{10}\mathrm{P}_1(\cos\theta)+(a_{11}\cos\varphi+b_{11}\sin\varphi)\mathrm{P}_1^1(\cos\theta)\right]\cos(\omega_{1s}t-\alpha_{1s}),$$
$$\phi_{2s} = \mathrm{j}_2(k_{2s}r)\left[a_{10}\mathrm{P}_2(\cos\theta)+(a_{21}\cos\varphi+b_{21}\cos\varphi)\mathrm{P}_2^1(\cos\theta)\right.$$
$$\left.+(a_{22}\cos 2\varphi+a_{22}\cos 2\varphi)\mathrm{P}_2^2(\cos\theta)\right]\cos(\omega_{2s}t-\alpha_{2s}).$$

固有値は (8) で定められる．球面 BESSEL 函数の零値 v_{ns} は数表を見れば容易に知ることができるが，また4・2・7の (105) を用いて求めることもできる．$n=0$ なる対称形規準振動の場合には，(10) の ϕ_{0s} の径函数は

(11)
$$\mathrm{j}_0(k_{0s}r)=\frac{\sin(k_{0s}r)}{k_{0s}r}$$

と表わされるが，これが (7) を満足するためには

(12)
$$\tan k_{0s}a = k_{0s}a$$

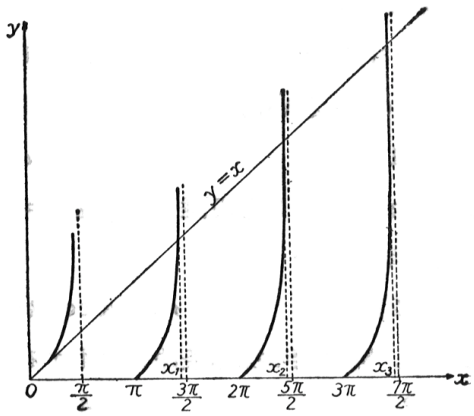
が成立すればよく，これから固有値 k_{0s} が決定される．その方法は第4・27図のように，$k_{0s}a=x$ とおき，$y=\tan x$ と $y=x$ とを x を横軸として描き，逐次近似法 (1) を用いて求める．その結果は

(13)
$$\frac{k_{0s}a}{\pi}=\frac{v_{0s}}{\pi}=1.4303,\quad 2.4590,\quad 3.4709,\cdots.$$

よって規準振動数は

(14)
$$v_{0s}=\frac{\omega_{0s}}{2\pi}=\frac{c}{2\pi}k_{0s}=\frac{c}{2a}\frac{v_{0s}}{\pi}\qquad(\mathrm{Hz})$$

を得る．



第4・27図　tan $x=x$ の根.

球対称ではないが単純な姿態は (9) にて $n=1$ とおいた場合である．この場合の径函数は (10) の ϕ_{1s} と4・2・7 の (105) とより

(15)
$$\mathrm{j}_1(k_{1s}r)=\frac{\sin k_{1s}r}{k_{1s}^2r^2}-\frac{\cos k_{1s}r}{k_{1s}r}.$$

(15) が (7) を満足するためには

(16)
$$\tan k_{1s}a=\frac{2k_{1s}a}{2-k_{1s}^2a^2}$$

が成立せねばならぬ．これを $x=k_{1s}a$ とおいて第4・28図のように

(17)
$$y=\cot x,\qquad y=\frac{2-x^2}{2x}$$

なる曲線を描き，図上で根を求めると，固有値および規準振動数は

(18)
$$\frac{k_{1s}a}{\pi}=\frac{v_{1s}}{\pi}=0.6625,\quad 1.891,\quad 2.930,\quad 3.948,\quad 4.959,\ \cdots,$$

(1)　2・3・4 で示した FOURIER の方法を用いる．

(18)'　　$$\nu_{1s} = \frac{c}{2a}\frac{\nu_{1s'}}{\pi} \qquad \text{(Hz)}$$

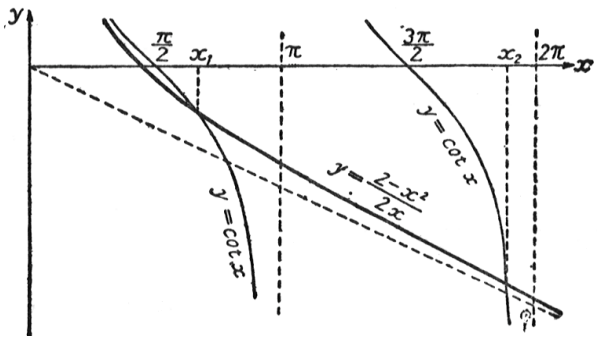
となる．(18) の $\frac{k_{11}a}{\pi} = 0.6625$ は球形空洞の規準振動姿態の最低の固有値であり，この場合の波長は

(19)　　$$\lambda_{11} = \frac{2\pi}{k_{11}} = 1.509 \times 2a \qquad \text{(m)}$$

であり，流体は左右に往復運動し，恰も両端閉鎖管内の音場のような姿態となる．第4･29図にはこの場合の等圧面が示してある．流体の流れはこの面に直角である．次の振動姿態 $k_{12}a/\pi = 1.891$ は

(20)　　$$\frac{r}{a} = \frac{0.6625}{1.891} = 0.350$$

なる球面上で径方向の粒子速度が消滅する．すなわち $r = 0.35a$ は節球面である．



第4・28図　$\cot x = \frac{2-x^2}{2x}$ の根.

4・5・3　　円錐管内の音場

母線が頂点0交わる円錐形空洞は球の一部と見なすことができるので，開口部（$r = a$）の条件を近似的に $s = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$ とおけば，頂角の開きの小さい円錐内部の音場は (11) で表わされるから，固有値は

(21)　　$$\sin ka = 0$$

より定まる．もしも円錐管の両端 $r = a$ および $r = b$ が開いている場合には音場の形を

(22)　　$$r\phi = A\cos kr + B\sin kr$$

とおき，開口端の境界条件を適用すると

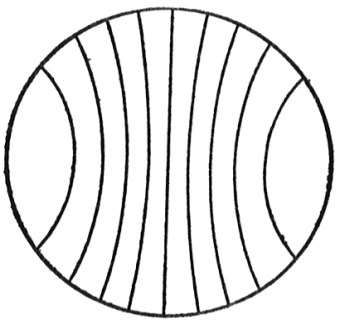
(23)　　$$A\cos ka + B\sin ka = 0,$$
$$A\cos kb + B\sin kb = 0.$$

これより固有値は

(24)　　$$\sin k(b-a) = 0$$

にて決定される．これは長さが $b-a$ なる管の振動と同形である．

以上の解析は，円錐の頂角の開きの小さい範囲でのみ正しい．開きが大きい場合には4・2・7の (148) が θ および φ に関する境界条件を満足するように，その係数を定めれば音場が求まる．



$\nu_{11} = 0.3313\, c/a \approx \frac{112.4}{a}$ (Hz)

第4・29図　球形空洞の最低次規準振動の等音位面.

4・5・4　円筒形空洞の規準振動姿態

円筒の中心軸を z とし，半径 a なる閉じた円筒内の純然たる横方向の振動のみを扱う場合には，ϕ

は z に関して一定と見なされるので，4・2・6 の結果を用いれば中心線上に音源が無い場合の解は

(25)
$$\phi = A\mathrm{J}_n(k\rho)\cos n\varphi\,, \qquad k = \frac{\omega}{c}$$

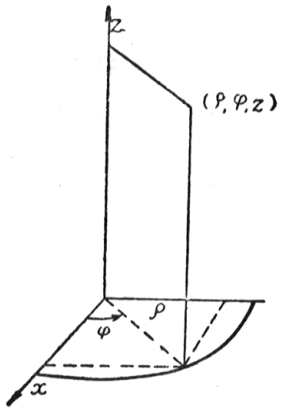
である．この解が (2) を満足するためには，

(26)
$$\mathrm{J}_{n'}(ka) = 0$$

であればよく，これより $n=0$ なる径方向対称振動姿態の固有値は

(27)
$$\frac{k_{0m}a}{\pi} = \frac{u_{0m'}}{\pi} = 1.2179\,,\quad 2.2330\,,\quad 3.2383\,,\cdots,$$

(28)
$$\nu_{0m} = \frac{c}{2a}\frac{u_{0m'}}{\pi} \qquad (\mathrm{Hz})$$



第4・30図

となる．　$n=1$ なる振動姿態の固有値は

(29)
$$\frac{k_{1m}a}{\pi} = \frac{u_{1m'}}{\pi} = 0.586\,,\quad 1.697\,,\quad 2.717\,,\cdots$$

(30)
$$\nu_{1m} = \frac{c}{2a}\frac{u_{1m'}}{\pi} \qquad (\mathrm{Hz})$$

であり，最低の固有値を含む系列である．

軸方向の振動を含む場合は

(31)
$$\phi = A\mathrm{J}_n\left(\sqrt{k^2-k_z^2}\,\rho\right)\cos n\varphi\cdot\frac{\sin}{\cos}k_z z\,,$$

ただし

$$k_z = \frac{s\pi}{L_z} \qquad s = 0\,,1\,,2\,,3\,,\cdots,$$

となる．L_z は円筒の長さである．固有値は

(32)
$$\mathrm{J}_{n'}\left(\sqrt{k^2-k_z^2}\,a\right) = 0$$

より決定され

(33)
$$\sqrt{k^2-k_z^2} = \frac{u'_{nm}}{a}\,,$$
$$k^2{}_{nms} = \left(\frac{u'_{nm}}{a}\right)^2 + \left(\frac{s\pi}{L_z}\right)^2\,,$$

(34)
$$\nu_{nms} = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{u_{nm'}}{a}\right)^2 + \left(\frac{s\pi}{L_z}\right)^2}\ (\mathrm{Hz})\,.$$

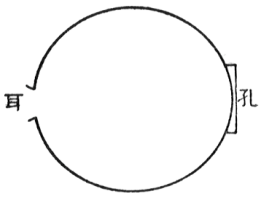
ここで注意すべきことは，円筒内の　z　方向の波長は　$\dfrac{2\pi}{k_z} = \dfrac{2\pi c}{\omega}$　よりも長く

(35)
$$\lambda_z = \frac{2\pi}{k_z} = \frac{2}{\sqrt{k^2-\left(\dfrac{u_{nm'}}{a}\right)^2}} \qquad (\mathrm{m})$$

となっていることである.

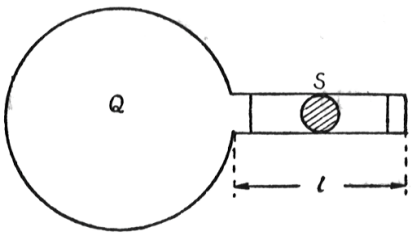
4・5・5　共鳴器の固有振動

共鳴器は HELMHOLTZ が楽音の倍音成分の分析に利用したので有名なものであるが,その構造は大部分閉じた空洞に小さな孔があけられていて,空洞内の~~空気~~の振動で定まる特定の固有振動数の音のみを強める作用をする.その正確な形状は大して問題とならず,ただ孔の寸法に比して空洞部の寸法がかなり大きければよい. HELMHOLTZ が母音の分析に用いた共鳴器は一方の端の中央に円形の孔のある円筒形共鳴器であり,また複雑な波形の楽音から一つの純音成分を取り出すのに用いた形は第4・31図に示すような単純な形のものである. 共鳴器の理論は HELMHOLTZ (1860) が数学的な解析法を確立し, 後に, Lord RAYLEIGH (1911) が単純化した.



第4・31図　HELMHOLTZ の共鳴器.

共鳴器の動作機構を説明するために最初は空洞の孔口に長い管のついた場合を考える. 第4・32図にて空洞の容積を Q とし, 管の部分の長さを l, その断面積を Sとし, 管の部分には密度 ρなるピストンがついているものと仮定する.



第4・32図

波長が空洞の寸法に比して充分長い場合には空洞内の凝縮 s , したがって音圧の分布はほとんど一様であると考えられ,その大きさは,ピストンの平均の位置からの外向の変位を ξ とすれば,

(35)
$$s = \frac{-S}{Q}\xi$$

と考えることができる.よってピストン面上に生ずる音圧は

(36)
$$p = \rho_0 c^2 sS \quad \text{または} \quad p = -\rho_0 c^2 \frac{S^2}{Q}\xi$$

であり. この系の力の平衡式は

(37)
$$\rho' lS\ddot{\xi} = -\rho_0 c^2 \frac{S^2}{Q}\xi$$

となる. よってこの系の最低固有振動数の $\omega_0/2\pi$ は

(38)
$$\omega_0^2 = \frac{c^2}{l}\frac{S}{Q}\frac{\rho_0}{\rho}$$

で定められる. 以上の考察において, ピストンの作用は大して重要なものではないから, これを空気で置きかえ,かつ管の長さが波長に比して短いとすればこの中の空気も非圧縮性と考えられる.よって (38) にて $\rho = \rho'$ とおけば

(39)
$$\nu_0 = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{S}{lQ}} \qquad (\mathrm{Hz})$$

は<u>頸のついた空洞の最低固有振動数</u>を与える式となる.

頸のない共鳴器についても同様に考えられる. この場合には孔の周囲の空気の質量による慣性が上

述のピストンの作用をすると考えればよい．孔から出入する流体については4･4･1の取扱法が適用でき，孔の伝導率 G を用いることができる．空洞内の音場は一様に ϕ_1 であり，孔から少し離れた外側では $\phi_2 = 0$ と考えると，t 秒間に孔を流出する流体量が q なる場合，その体積速度は

(40)　$$\dot{q} = G\phi_1 \qquad (\mathrm{m}^3/\mathrm{s})$$

と表わされる．然しこの関係は純然たる静運動学的(1) なものであるから，1･5 の観点に立つ動力学的な立場から $\rho_0\phi_1$ で表わされる運動量を q で表わすことが必要である．動力学的な関係式

(41)　$$c^2 s = \phi$$

は運動量の変化と力との関係を表わす式と考えられる．いま $q = 0$ の状態が平衡状態を示すものとすれば

(42)　$$s = -\frac{q}{Q}$$

と考えられるから，(40)（41）（42）から s を消去すると

(43)　$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{Gc^2}{Q} q = 0$$

を得る．よって解は

(44)　$$q = q_0 \cos(\omega_0 t - \varphi),$$

ただし

$$\omega_0^2 = \frac{c^2 G}{Q}$$

を得る．よって波長定数 k_0 および波長 λ_0 は

(45)　$$k_0^2 = \left(\frac{\omega_0}{c}\right)^2 = \frac{G}{Q}, \qquad \lambda_0 = 2\pi\sqrt{\frac{Q}{G}}.$$

運動のエネルギーは主として孔の附近に貯えられ

(46)　$$T = \frac{1}{2}\rho_0 \phi \dot{q} = \frac{1}{2}\frac{\rho_0}{G}\dot{q}^2 \qquad (\mathrm{J})$$

であり，ポテンシャル~~エネギー~~は

(47)　$$V = \frac{1}{2}\rho_0 c^2 s^2 Q = \frac{1}{2}\frac{\rho_0 c^2}{Q} q^2 \qquad (\mathrm{J})$$

である．これを見ると慣性係数は $\frac{1}{G}$ すなわち“孔の抵抗”に比例し，また安定係数は容積 Q に反比例することが分る．

G の値は孔の形状により定まるが，その決定法は容易でない．薄い壁の円形孔の場合の G は孔の直径に等しい値となり，また特定の形のときは4･4で述べてある．

孔からの輻射は空洞の固有振動数には影響を与えないが，その振幅の減衰に関係する．孔口から外に向う体積速度は（44）より

(1)　kinematical　　(2)　dynamic

(48)　$$\dot{q} = -\omega_0 q_0 \sin(\omega_0 t - \varphi)$$

となるから，孔口から輻射されるエネルギー流は $\omega_0 q_0$ なる強さの点音源から輻射される球面波のエネルギー流として4・4・1の (8) より求められ，また空洞内のエネルギー消費を代表するマサツ抵抗を R^M とすると，空洞内の全消費エネルギー流は

(49)　$$\overline{W} = \frac{1}{2}(R^M + R^A S)\left|\dot{\xi}\right|^2 = \frac{\rho_0 \omega_0^4 q_0^2 (1+\mu)}{8\pi c} \qquad \text{(W)}$$

ただし　$\mu = R^M / R^A S$,　$\dot{\xi} = \omega_0 q_0 / S$,　$R^A = \dfrac{\rho_0 \omega_0^4 S}{4\pi c}$

で与えられる．空洞に蓄えられているエネルギーは

(50)　$$\overline{E} = \frac{1}{2}\rho_0 c^2 \frac{q_0^2}{Q} \qquad \text{(J)}$$

であり，$\overline{E}$ の減少の割合が $\overline{W}$ に等しいとおけば

(51)　$$\frac{dq_0}{dt} + \frac{q_0}{\tau_0} = 0 ,$$

ただし

(52)　$$\tau_0 = \frac{8\pi c^3}{\omega_0^4 Q} = \frac{8\pi Q}{cG^2(1+\mu)} \qquad \text{(s)}$$

を得る，τ_0 は頸のない共鳴器の最低固有振動姿態の減衰率である．

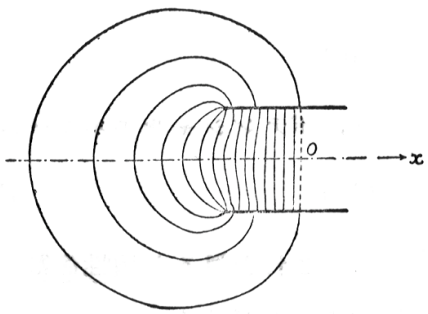
4・5・6　管の開口端の補正

空気圧の固有振動数の大略の値は，3・2・5 で述べた方法で求められるが，管の端を開放した場合には前に述べた境界条件が現象と正確に適合してないために，理論的に求めた共振時の波長と管長との関係が実際の場合と正確に一致しない．このような場合の開口端の補正は次のような方法で求めることかできる．

管が比較的細く，開口端の附近を除いた管内の全領域で波面が平面波となっているものと仮定し，原点を開口部の附近の管内で，姿態が平面波と見なし得る場所に置く（第4・33図）．開口部においては，完全反射が生じていないために，波長に比して短い部分の範囲で平面波から発散球面波に移り行く部分が生じ，そのために完全反射端と仮定して求めた管の共振周波数と相異をきたすことになる．管内の波動は開口端の反射を考えると

(53)　$$\phi = (Ae^{-ikx} + Be^{ikx})e^{-i\omega t}$$

と表わせる．この第一項は管内を開口部に向って進行する成分波を，第二項は開口部で反射されて管の内部に向う進行波成分を表わし，A と B とは未定係数であり，その比は開口部の反射条件によって定められる．



第4・33図　管の開口端附近の音場の等音位面．

原点　$x=0$ における外向の粒子速度は

(54)　$$\dot{\xi}(0) = ik(B-A) \qquad \text{(m/s)}$$

であるから，S を管の断面積とすると外向の体積速度は

(55)　$\dot{q} = ikS(B-A)$　(m³/s)

となる．$x=0$ なる断面と外部との間の孔の抵抗[1]の大きさは管の長さがある長さ α だけ増したと考えることによって代表できるから，抵抗の次元が $\left[L^{-1}\right]$ であることより，抵抗は α/S と表わされる．断面 $x=0$ における速度ポテンシャルは $A+B$ であるから，4・4・1の (3) および (4) を用いれば

(56)　$$A+B = ikS(B-A)\frac{\alpha}{S}\ .$$

これより

(57)　$$\frac{B}{A} = -\frac{1+ik\alpha}{1-ik\alpha}$$

を得る．ここで

(58)　$$k\alpha = \tan k\beta\ ,\qquad (\beta>0)$$

とおくと

(59)　$$\frac{B}{A} = -e^{i2k\beta}$$

となり，[2] (53) は

(60)　$$\phi = A\left\{e^{-ikx} - e^{ik(x+2\beta)}\right\}e^{-i\omega t}$$

となる．これを見ると開口端における反射波は入射波と等しい振幅を有し，その位相のみが異なることが分る．この結果は外部流体の慣性のみに着目した当然の結果である．(60) を変形して

(61)　$$\phi = Ae^{ik\beta}\left\{e^{-ik(x+\beta)} - e^{ik(x+\beta)}\right\}$$

と書けば，明らかに開口端 $x=-\beta$ で $s=0$ （すなわち $\phi=0$ ）となり3・2・5 の境界条件を満した完全反射が生じているように見える．したがって $x=-\beta$ なる点に開口端が存在すると考えれば3・2・5 の理論を適用することができる．すなわち開口端の座標を $x_1\,(x_1<0)$ とするとき，完全反射をする仮想開口端が $-(\left|x_1\right|+B)$ の位置にあると考えると管内の音場が正確に表現される．したがって見掛の管長が β だけ左方に伸ばされたかのような観を呈する．

管内波長が管の直径に比して充分に長いときは $k\alpha$ は小さな値となるから

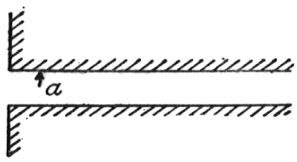
(62)　$$\beta \approx \alpha \qquad (\mathrm{m})$$

と見なすことができる．よって開口端の抵抗（したがって導電率）が定まれば β は求まる．しかし開口部が絞られていたり，または開口部に障碍物が存在したりすると $k\alpha$ は大きくなり

(63)　$$k\beta \Rightarrow \frac{\pi}{2}$$

となる．この場合には $B \Rightarrow A$ となり，閉じた端の反射に近い状態となる．

実際に α を決定しようとすると困難を伴なう場合が多い．Lord RAYLEIGH は第4・34図のように無限に大きい鍔のついた開口部に対して近似的に



第4・34図

(1)　resistance．導伝率の逆数をいう．

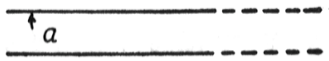
(2)　$\dfrac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta} = e^{i2\theta}$

(64)　$\alpha = 0.82\,a$　(m)

を与えている．a は管の半径である．また第4・35図のような鍔のない管では実験的に

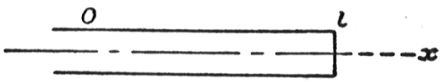
(65)　$\alpha \approx 0.6\,a$　(m)

が求められている．[3]



第4・35図

一端を閉じた管において，原点の位置を前と同様に開口部附近に取り，$x = l$ を閉鎖端として管内の音場を求めてみる（第4・36図）．管の開口部の附近を除けば，音場の形は



第4・36図

(66)　$\phi = A\cos k\,(l - x)$

で表わされ，開口から外に向う体積速度は

(67)　$\dot{q} = S\dfrac{\partial \phi}{\partial x} = k\,S\,A\sin k\,l$

である．平面波の速度ポテンシャルは　$A\cos kl$　であるから抵抗を α とすると，前と同様に

(68)　$A\cos k\,l = \dfrac{\alpha}{S}\,k\,S\,A\sin k\,l$

が成立する．これより

(69)　$\cot kl = k\alpha$

を得る．この式より種々の固有振動姿態の波長

(70)　$\lambda = \dfrac{2\pi}{k}$

が定まる．通常は $k\alpha$ が小さいので（69）の解は

(71)　$kl = \left(m + \dfrac{1}{2}\right)\pi - k\alpha\,,$

または

(72)　$k\,(l + \alpha) = \left(m + \dfrac{1}{2}\right)\pi\,,\quad m = 0\,,1\,,2\,,3\,,\cdots$

で与えられる．よって管の長さが α だけ長いものと考えれば3・2・5で述べた基本解と同形となり，この管の固有振動数の系列は1,3,5.・・・の奇数系列である．なお αの値は波長が半径に比して充分に大きな範囲でのみ正確である．また鍔のある管の全長を　としこれに共鳴する音の波長を l とすると，$a << \lambda_0$ の範囲では

(73)　$\dfrac{\lambda_0}{4} = \left(l + \dfrac{8}{3\pi}a\right) \approx (l + 0.85a)\,,\qquad \alpha = \dfrac{8a}{3\pi}$

（3）　管の端の附近の音場を正確に計算するにはかなり手数を要するが SCHWINGER が解いている．
H.LEVINE and J.SCHWINGER :"On the Radiation of Sound from an Unflanged Circular Pipe" phys.Rev. Vol.73,　p.383～406.(1948).

である.[4] 開口部が細まれば α は増大し，完全に閉じてしまえば (69) の解は

(74)
$$kl = \frac{1}{k\alpha}, \qquad k^2 = \frac{1}{\alpha l}$$

となり， $Sl = Q$, $\frac{S}{\alpha} = G$ とおくと共鳴器の固有振動数 (44) と一致する.

両端開放管の場合には,両開口端の乱れが互に干渉し合わぬ場合には別々の端の補正 α と α' を用いて

(75)
$$\tan kl = -k(\alpha + \alpha')$$

より k を求めることができ，さらに $k\alpha$ と $k\alpha'$ が小さい場合には

(76)
$$\sin k(l + \alpha + \alpha') = 0$$

を解くのと同じことになり,管長が $l + \alpha + \alpha'$ の場合の固有振動数で共振する.

管の共振エネルギーの減衰を計算するために

(77)
$$\phi = A\cos k_0(l - x)\cos\omega_0 t$$

より運動のエネルギーを求めると，

(78)
$$T = \frac{1}{2}\rho_0 S\int_0^l \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\rho_0 k_0^2 lSA^2\cos^2\omega_0 t$$

となる.ここに $k\alpha$は小さいから省いておいても充分の精度を得る.よって全エネルギーは

(79)
$$\overline{E} = \frac{1}{4}\rho_0 k_0^2 lSA^2 \qquad (\mathrm{J}).$$

開口部に鍔のない場合の開口部からの輻射は,開口部に強さが

(80)
$$SA\sin k_0 l \quad \text{または} \quad k_0 SA$$

なる点音源があると考えられるから，輻射エネルギーは4・4・1の (8) より

(81)
$$\overline{W} = \frac{\rho_0 c k_0^4 S^2 A^2}{8\pi} \qquad (\mathrm{W})$$

であり，減衰率は

(82)
$$\tau = \frac{4\pi l}{k_0^2 cS(1+\mu)} \qquad (\mathrm{s})$$

$$\mu = R^M / R^A S, \qquad R^A = \frac{\rho_0 c k_0^2 S}{4\pi}$$

となる.

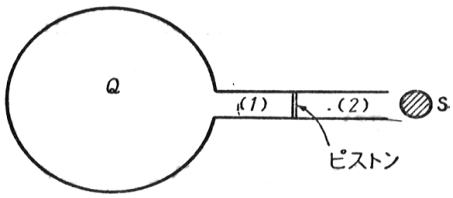
4・~~6~~・7　共鳴器の外部音源による強制振動

共鳴器は外部音場によって共鳴を生じ,空洞内の流体の振動は著しく激しい状態になることはよく知られている.しかし共鳴現象を理論的に解析するには共鳴器と~~音源~~との結合による相互作用を考え，音源に対する共鳴器の反作用をも含めて取扱わねばならぬのでかなり繁雑なものとなる.しかしこの

(4)　$\alpha = \frac{8a}{3\pi}$ の証明は下巻 5・3・2 を参照. または
Lord RAYLEIGH : "Theory of Sound". Vol. II. p.198.
Irving. B.CRANDALL : "Theory of Vibrating System and Sound". p.150. 1926.

取扱法によって共鳴器の作用が明白になるし,またなにも仕事をしない空洞が存在することによって何ゆえ強大な音が輻射されるかということも理解されるようになる.

取扱を簡単にするため第4･37図のような頸のついた空洞の強制振動を考える.音源の波長が空洞の寸法に比して充分に長く,かつ空洞の共振波長に近い場合は実用的に最も重要であると共にまた最も簡単な場合である.強制振動の機構を明らかにするために,頸部に薄い質量のないピストンを考え,このピストンが振動することにより外方に排除する流体の量すなわち体積変位が



第4・37図

(83)　$$q^{(i)} = q_0 \cos\omega t \qquad (\mathrm{m}^3)$$

であると仮定する．ピストンがこのような運動を持続するためには,ピストンの両側に生ずる圧力差を補うための外力を附加する必要があり,その単位断面積ごとの大きさは

(84)　$$p^{(i)} = B^{(i)} \cos\omega t + B^{(0)} \sin\omega t \qquad (\mathrm{Pa})$$

の形で表わされる．ただし　$p^{(i)}$　の方向は外向を正とする．ここに　$B^{(i)} \cos\omega t$　なる成分は体積変位と同相の変化をして空気の慣性を制御するための力であり，　$B^{(i)}$　は1･2で述べたように　ω　の小さな範囲では q_0 と同符号であるが，　ω が大きくなると逆符号となる.よってもしも

(85)　$$B^{(i)} = 0$$

となるように ω を選べば,そのときの ω は空洞の共振角周波数 ω_0 ときわめて近い値となる.ただし

(86)　$$\omega_0^2 \approx \frac{c^2 G}{Q}\ .$$

(84) の第二項　$B^{(0)} \sin\omega t$　は体積速度　$\dot{q}^{(i)}$と同相の変化をする外力の成分であり，これは空洞から外に輻射されるエネルギー流を補うために必要な項である．

開口部から輻射される外向エネルギー流は (49) より

(87)　$$\overline{W}^{(i)} = \frac{\rho_0 \omega_0^4 q_0^2}{8\pi c} \qquad (\mathrm{W})$$

と表わされるが,一方またピストンの外面の圧力を $p_2^{(i)}$ とすれば

(88)　$$\overline{W}^{(i)} = \overline{p_2^{(i)} \cdot \dot{q}^{(i)}} \qquad (\mathrm{W}).$$

よって (87) と (88) を比較すると，強制力によってピストンが励振されたときにピストンの外面に生ずる圧力は

(89)　$$p_2^{(i)} = p_0 + D\cos\omega_0 t + B^{(0)} \sin\omega_0 t = p_0 + D\cos\omega_0 t + \frac{\rho_0 \omega_0^2 (1+\mu)}{4\pi c}\dot{q}^{(i)} \qquad (\mathrm{Pa})$$

$$B^{(0)} = -\frac{\omega_0^3 \rho_0 (1+\mu)}{4\pi c} q_0, \qquad \mu = R^M / R^A S, \qquad R^A = \frac{\rho_0 \omega_0^2 S}{4\pi c}$$

とならねばならぬ.[1] また空洞内の流体に対してピストンはなんらの仕事もなさないと考えられ

(1)　$\dot{q}^{(i)} = -\omega q_0 \sin\omega t$,

$\overline{p_2 \dot{q}} = \frac{1}{T}\int_0^T p_2 \cdot \dot{q} dt = \overline{W}$　となるような形が (89) である．ただし　$T = 2\pi/\omega$.

るので，ピストン内面の圧力は

(90)　$$p_1^{(i)} = p_0 + D\cos\omega_0 t \qquad (\mathrm{Pa})$$

となるべきである．[2] ここに D はピストンの運動によってピストン面上に生ずる圧力を表わし，$p_0^{(i)} - p_2^{(i)}$ は (84) を満足する．

次に外部音源が作用する場合を考えてみよう．ピストンが静止している場合に，外部音源によって開口部に生ずる圧力が丁度

(91)　$$p_2^{(e)} = p_0 + \frac{\rho_0\omega_0^3(1+\mu)q_0}{4\pi c}\sin\omega t = p_0 + \frac{\rho_0\omega_0^2(1+\mu)}{4\pi c}\dot{q}^{(e)} \qquad (\mathrm{Pa}),$$
$$\dot{q}^{(e)} = -\dot{q}^{(i)}$$

となった場合を考えれば，ピストンに特別の外力 $p^{(i)}$ を加えなくとも，ピストンは外部音場に励振されて (89) および (90) の圧力を生ずるような運動をする．したがって質量のない仮想のピストンはもはや除去しても差支えない．

外部音場によるピストン外面の速度ポテンシャルを $\phi_2^{(e)}$ とすると

(92)　$$p^{(e)} = p_0 + \rho_0\frac{\partial\phi_2^{(e)}}{\partial t}$$

であるから，外部音源が単独に存在する場合の開口部の音場の $\phi_2^{(e)}$ は

(93)　$$\phi_2^{(e)} = -\frac{\omega_0^2(1+\mu)q_0}{4\pi c}\cos\omega_0 t = -\frac{\omega_0^2(1+\mu)}{4\pi c}q^{(e)},$$
$$q^{(e)} = -q_0\cos\omega_0 t$$

となる．ここに $q^{(e)}$ は開口部から共鳴器の内方に変位する体積変位である．

いままで仮想してきたピストンは，便宜上のもので，本質的には大して重要なものでなく，ピストンの代りに開口部に薄い膜を仮想し，これが外部流体と接していると考えてもよく，また取り除いて考えてもよい．

$q^{(e)}$ なる体積変位を生ずるような開口部の音場 (93) が定まると，逆に開口部の音場が

(94)　$$\phi_2 = J\cos(\omega_0 t - \varphi)$$

であるときの，最大共振時の管内の体積変位は

(95)　$$q = -\frac{4\pi c}{\omega_0^2(1+\mu)}J\cos(\omega_0 t - \varphi) \qquad (\mathrm{m}^3)$$

で定められる．ここに ω は (86) の ω_0 に近い値であり，(95) に対応する体積速度は

(96)　$$\dot{q} = \frac{4\pi J}{k_0(1+\mu)}\sin(\omega_0 t - \varphi) \qquad (\mathrm{m}^3/\mathrm{s}).$$

である．ただし (95) (96) の q および $\dot{q}$ は内向を正とする．[3]

輻射エネルギーは遠方を囲む球面上を貫くエネルギー流から求められる．この場合の速度ポテンシ

---

(2)　$p_1\bar{\dot{q}} = 0$ となるような形．

(3)　音源から空洞に向って流入するエネルギー流を表わしている．

ャルは (96) の　$\dot{q}$ によるものの方が外部音源によって直接生ずるものよりも遙かに大き<なる．よってこの場合の輻射エネルギーの時間平均値は (87) を用いて近似的に

(97)　$$\overline{W} = \frac{2\pi\rho_0 c}{(1+\mu)^2} J^2 \qquad (\mathrm{W})$$

と表わすことかできる．

この結果を用いて, 共鳴器の開口部から　b なる距離の所に点音源　$A\cos kct$　が存在する場合を求めると, 開口部のすぐ外側の音場は

(98)　$$\phi_2 = -\frac{A_0}{4\pi b}\cos k_0(ct-b),$$

(99)　$$J = \frac{A_0}{4\pi b},$$

(100)　$$\dot{q} = \frac{A_0}{k_0 b(1+\mu)}\sin k(ct-b)$$

となり, 開口部の体積速度は外部音源によって直接生ずる音場の $\dfrac{1}{k_0 b(1+\mu)}$ 倍となる．よって b　が波長に比して小さく　$k_0 b(1+\mu)$　が 1 に比して小さい場合にはこの値は大きくなり，開口部から輻射されるエネルギーは点音源のみから輻射されるエネルギーの

(101)　$$\frac{1}{k_0^2 b^2 (1+\mu)^2} \qquad 倍$$

となる．

音源が　$B_0\cos kct$　なる二重音源で, 共鳴器の開口部が二重音源の軸と θ　なる角をなす方向に b だけ離れて存在する場合には，kb の小さな範囲で

(102)　$$\phi_2 = \frac{B_0}{4\pi b^2}\cos\theta\cdot\cos k_0(ct-b)$$

となる．よって

(103)　$$J = \frac{B_0}{4\pi b^2}\cos\theta$$

であり, 開口部より輻射されるエネルギー流は (97) より

(104)　$$\overline{W} = \frac{\rho_0 c B_0^2 \cos^2\theta}{8\pi b^4 (1+\mu)^2} \qquad (\mathrm{W})$$

となり, 二重音源が単独に存在する場合の輻射エネルギー

(105)　$$\overline{W} = \frac{\rho_0 c k_0^4 B_0^2}{24\pi} \qquad (\mathrm{W})$$

と比較して

(106)　$$\frac{3\cos^2\theta}{k_0^4 b^4 (1+\mu)^2} \qquad 倍$$

となっている．　$\cos^2\theta$ の平均値は　$\dfrac{1}{3}$ であるから, すべての方向に輻射されるエネルギーは, 平均

して $\dfrac{1}{k_0^4 b^4 (1+\mu)^2}$ となっている. これをみると二重音源の方が共鳴器の作用が著しく現われることが分る.

輻射エネルギーの共鳴器による増加は, 共鳴器がなんら仕事をしない所から考えてみて間接的な作用であると考えなければならぬ. すべてのエネルギーは外部音源から供給されていて, 音源に加わる外力の成分の内の速度と同相の成分がこの作用を営んでいる. (96)で示される共鳴器の外向体積速度による速度ポテンシャルは

(107)
$$\phi = \frac{J}{k_0 r (1+\mu)} \sin(\omega_0 t - k_0 r - \varphi)$$

であり, 圧力は

(108)
$$p = p_0 + \frac{\rho_0 c J}{r(1+\mu)} \cos(\omega_0 t - k_0 r - \varphi) \qquad (\mathrm{Pa})$$

である. いま一次音源が点音源である場合を考え, (98) と (99) より

(109)
$$J = \frac{A_0}{4\pi b}, \qquad \varphi = k_0 b$$

とおき, かつ　$r = b$ とおくと音源の近傍の圧力は

(110)
$$p = p_0 + \frac{\rho_0 c A_0}{4\pi b^2 (1+\mu)} \cos(\omega_0 t - 2k_0 b)$$

となる. 音源から外向に流出する体積速度が

(111)
$$A_0 \cos\omega_0 t \qquad (\mathrm{m^3/s})$$

に保たれているとすれば, 圧力に対して音源がなす仕事量の時間平均は

(112)
$$\overline{W} = \frac{\rho_0 c A_0^2}{8\pi b^2 (1+\mu)} \cos 2k_0 b \qquad (\mathrm{W})$$

となり, 共鳴器のない場合の

(113)
$$\frac{1}{k_0^2 b^2 (1+\mu)} \cos 2k_0 b \qquad 倍$$

となる.

最大共振時に共振器に貯えられるエネルギーは (50) より

(114)
$$\overline{E} = \frac{8\pi^2 \rho_0 c^4 J^2}{\omega_0^4 Q (1+\mu)^2} = \frac{8\pi^2 \rho_0 Q J^2}{G^2 (1+\mu)^2} \qquad (\mathrm{J})$$

となり, 容積　Qに比例し孔の導伝率　Gの平方に反比例する.

一次音源が共鳴器から遠くはなれている場合には, 開口部の入射波を

(115)
$$\phi_2 = J \cos k_0 (ct - x)$$

なる平面波であると仮定して容易に解くことができ, 共鳴器から輻射されるエネルギーは (97) より

(116)
$$\overline{W} = \frac{2\pi \rho_0 c J^2}{(1+\mu)^2} = \frac{4\pi}{k_0^2 (1+\mu)^2} \overline{w}_0 = \frac{\lambda^2}{\pi (1+\mu)^2} \overline{w}_0 \qquad (\mathrm{W}),$$

ただし $\overline{w}_0$ は入射平面波のエネルギー流密度

(117)　$$\overline{w}_0 = \frac{1}{2}\rho_0 c k^2 J^2 \qquad (\mathrm{W/m^2})$$

であることが示される．よって音源から遠くにある共鳴器は一次入射波の波面の1波長を1辺とする正方形の面積を貫くエネルギー流の 0.318倍を最大共振時に輻射する．

強制周波数~~の~~ $\omega/2\pi$ 共振器の固有周波数 $\omega_0/2\pi$ の近くにない場合には，(83) なる振動を保つための外力は (84) の二つの項よりなると考える必要がある．この場合には ϕ_1 を共振器内部のポテンシャル，ϕ_2 外部のポテンシャルとすれば，頸のない共鳴器の場合には

(118)　$$\dot{q} = G(\phi_1 - \phi_2)$$

と置ける．しかるに内部においては

(119)　$$s = \frac{-q}{Q}, \qquad c^2 s = \dot{\phi}_1$$

であるから

(120)　$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = -G\dot{\phi}_2,$$
$$\omega_0^2 = \frac{c^2 G}{Q}$$

となり．外部音圧は

(121)　$$p_2 - p_0 = \rho_0 \dot{\phi}_2 = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{G}\rho_0 q_0 \cos\omega t \qquad (\mathrm{Pa})$$

となる．これが (84) の $B^{(1)}$の項を表わす．すなわち空洞内の空気の慣性を制御する力である．(84) の第二項は $\dot{q}$ と同相の変化をする項であって，これを平均すると空洞内の流体になんらエネルギーの増減を与えないものであるから (91) の形を用いることができ，両者を合せて

(122)　$$p = p_0 + \rho_0 q_0 \left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{G}\cos\omega t + \frac{\omega^3(1+\mu)}{4\pi c}\sin\omega t \right)$$

を得る．これが ω と ω_0 が近くない場合の強制外圧力である．これに対する開口部附近のポテンシャルは

(123)　$$\phi = \frac{\omega q_0}{G}\left\{ \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\sin\omega t - \frac{kG(1+\mu)}{4\pi}\cos\omega t \right\}.$$

いま開口部附近のポテンシャルが (94) のように

(124)　$$\phi_2 = J\cos(\omega t - \varphi)$$

で与えられれば (123) との比較から

(125)　$$J\cos\varphi = -\frac{kG}{4\pi}\frac{\omega q_0}{G} = -\frac{k\omega q_0}{4\pi},$$
$$J\sin\varphi = \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\frac{\omega q_0}{G}$$

を得る．これより体積速度の大きさ ωq_0 と J との関係は

(126)
$$\left(\frac{J}{\omega q_0}\right)^2 = \frac{1}{G^2}\left\{\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{kG(1+\mu)}{4\pi}\right)^2\right\}.$$

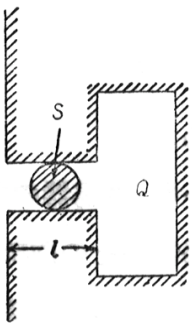
さらに (52) で定まる減衰率 τ_0 を用いて書けば

(127)
$$\left(\frac{J}{\omega q_0}\right)^2 = \frac{1}{G^2}\left\{\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{2}{\omega_0\tau_0}\cdot\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right\}$$

となる.

この結果を見ると,(127) の第二項は共振の附近 ($\omega=\omega_0$) を除けば常に第一項より小さく,したがって J が一定の場合には体積速度 $\dot{q}$ の振幅の ωq_0 は $\omega\approx\omega_0$ のときに最大値となる. また $\frac{\omega_0}{\omega}$ が から遠去かるにしたがって ωq_0 が減少するが, その減少の仕方は $\omega_0\tau_0$ が大きいはと減衰が甚だしい. つまり自由振動の制動の少ないほど, $\frac{\omega^0}{\omega}$ が 1 からずれたときの振幅の減少が甚だしい.

無限に広い鰐を持った共鳴器が音源から遠くはなれて存在する場合には入射波は平面波と考えることができ, 簡単に取扱われる. 頸部の長さを l ,その断面積を S とし, 空洞内の圧力の増加を δp とすると



第4・38図

(128)
$$\delta p = \rho_0 c^2 s = \rho_0 c^2 \frac{dQ}{Q} \qquad (\mathrm{Pa})$$

であるが, また頸部の流体の変位を $\delta\xi$ とすると

(129)
$$dQ = S d\xi \qquad (\mathrm{m}^3)$$

であるから

(130)
$$\delta p = \rho_0 c^2 \frac{S}{Q} d\xi .$$

よって S なる面に空洞がおよぼす反撥力は

(131)
$$\delta F = S\delta p = \rho_0 c^2 \frac{S^2}{Q} d\xi ,$$

または

(132)
$$F = \rho_0 c^2 \frac{S^2}{Q}\xi \qquad (\mathrm{N}).$$

頸部の流体の質量は

(133)
$$plS \qquad (\mathrm{kg})$$

であり, また S なる開口部から輻射されるエネルギーは体積速度が $2\xi S$ なる点音源から輻射されるエネルギー流の半分と見なすことができ

(134)
$$\overline{W} = \frac{\rho_0 c k^2 \xi^2 S^2}{4\pi} \qquad (\mathrm{W})$$

と表わされるが,[1] これはまた音響抵抗（輻射抵抗）を R^A とすれば

(135)
$$\overline{W} = \frac{1}{2} R^A S \left|\dot{\xi}\right|^2 \qquad (\mathrm{W})$$

(1)　4・4・1 参照.

とも表わされる.[2] よって音響輻射抵抗は

(136)　$$R^A = \frac{\rho_0 c k^2}{2\pi} S \qquad (\mathrm{Pa \cdot s/m})$$

となり頸部の質量に対する力の平衡式は

(137)　$$\rho_0 l S \frac{d^2\xi}{dt^2} + \rho_0 c k^2 \frac{S^2(1+\mu)}{2\pi}\frac{d\xi}{dt} + \rho_0 c^2 \frac{S^2}{Q}\xi = pS \qquad (\mathrm{N})$$

となる. ここに右辺の p は入射平面波の音圧である. これより ξ または $\dot{\xi}$ は容易に p の項で表わされ, 印加音圧が単弦振動

(138)　$$p = p_0 e^{-i\omega t} \qquad (\mathrm{Pa})$$

の場合には, 頸部の振動速度は

(139)　$$S\dot{\xi} = S\frac{d\xi}{dt} = \frac{p_0 e^{-i\omega t}}{\dfrac{\rho_0 c k^2(1+\mu)}{2\pi} - i\left(\dfrac{\rho_0 \omega l}{S} - \dfrac{\rho_0 c^2}{\omega Q}\right)} \qquad (\mathrm{m^3/s})$$

より求められる. なお開口部から空胴を見たときの比音響インピーダンスは

(140)　$$Z^A = \frac{\delta p}{\dot{\xi}} = \frac{\rho_0 c k^2(1+\mu)}{2\pi} S - i\left(\omega\rho_0 l - \frac{\rho_0 c^2}{\omega Q} S\right) \qquad (\mathrm{Pa \cdot s/m})$$

である.

4・5・8　共鳴器の内部音源による強制振動

共鳴器がその内部にある音源によって励振される場合は, オルガンその他の管楽器の発音機構と関連しているので, 実用上興味のある問題である. これらの楽器は音源と音響管との組合せと考えられ, 音源が恰も一端開放一端閉鎖管の閉鎖端に置かれているかのごとき状態を呈する. よって, これらの問題を解析するために, 多少理想化した条件の下に音場を解くことにする.

断面の形状が一定なる音響管の開口端の補正 α を考慮に入れて 4・5・6 で述べたように座標原点 O を定める. 音源は閉鎖端 $x = l$ にあってその強さが $A_0 e^{-i\omega t}$ であり, 断面上に一様に分布しているものとすれば, $x = l$ 端から $-x$ 方向に流出する体積速度は

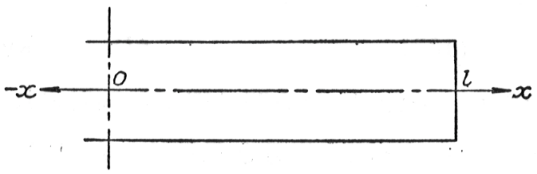
(141)　$$\dot{q}_s = -S\frac{\partial\phi}{\partial x}\Big]_{x=l} = A_0 e^{-i\omega t} \qquad (\mathrm{m^3/s}),$$

ただし S は管の断面積である.

開口部から外向（ $-x$ 方向）に流出する体積速度を

(142)　$$\dot{q} = A\cos\omega t \qquad (\mathrm{m^3/s})$$

と仮定すると, 開口部附近の圧力は（84）のように２項からなるものと考えられ, その第一項である開口部附近の空気の慣性を制御するのに必要な音圧に対応する速度ポテンシャルは,（56）より



第4・39図

（2）　空洞内のエネルギーを消費する原因は開孔部よりの輻射損失と空洞壁面上のマサツ損失とであるがここでは前者に比して後者を無視している. マサツ損失による減衰およびエネルギー吸収は 4・6・5 を参照のこと.

(143)
$$\phi^{(i)} = \frac{\alpha}{S}\dot{q} = \frac{\alpha}{S}A\cos\omega t\ ,$$

第二項である開口部から輻射される外向発散波を作るのに必要な音圧は（91）より

(144)
$$p^{(i)} - p_0 = \frac{\rho_0\omega^2(1+\mu)}{4\pi c}\dot{q}^{(i)} = \frac{\rho_0 c k^2(1+\mu)}{4\pi}A\cos\omega t \qquad (\mathrm{Pa})$$

と表わされるから，これに対応する速度ポテンシャルは

(145)
$$\phi^{(0)} = \frac{kA(1+\mu)}{4\pi}\sin\omega t\ ,$$

ただし α は開口端の補正であり，また $k=\omega/c$ である．よって体積速度（142）に対応する原点の速度ポテンシャルは

(146)
$$\phi(0) = \left(\frac{\alpha}{S}\cos\omega t + \frac{k(1+\mu)}{4\pi}\sin\omega t\right)A\ .$$

これを複素数表示で表わすと

(147)
$$\dot{q} = Ae^{-i\omega t} \qquad (x=0)$$

なる体積速度に対応する原点の速度ポテンシャルは

(148)
$$\phi(0) = \left(\alpha + \frac{ikS(1+\mu)}{4\pi}\right)\frac{A}{S}e^{-i\omega t}$$

と表わされる．なお（148）の実数部は（146）と一致する．

管内で，波面が平面波と見なされる範囲の音場は，$x=l$ にて（141）を満足せねばならぬから

(149)
$$\phi = \frac{1}{kS}\left\{B\cos k(l-x) - A_0\sin k(l-x)\right\}e^{-i\omega t}$$

と表わされ，これが（144）と（147）とを満足するためには

(150)
$$\begin{aligned} B\sin kl + A_0\cos kl &= A\ , \\ B\cos kl - A_0\sin kl &= \left(k\alpha + \frac{ik^2S(1+\mu)}{4\pi}\right)A\ . \end{aligned}$$

これより

(151)
$$\begin{aligned} B &= A\left\{\sin kl + \left(k\alpha + i\frac{k^2S(1+\mu)}{4\pi}\right)\cos kl\right\}\ , \\ A_0 &= A\left\{\cos kl - \left(k\alpha + i\frac{k^2S(1+\mu)}{4\pi}\right)\sin kl\right\} \end{aligned}$$

を得る．（151）の下の式より開口端の外向体積速度の大きさ A と音源の強さ A_0 との関係が定まり，その大きさのみに着目すれば

(152)
$$\left|\frac{A_0^2}{A^2}\right| = (\cos kl - k\alpha\sin kl)^2 + \left(\frac{kS(1+\mu)}{4\pi}\right)^2\sin^2 kl\ .$$

開口部から輻射されるエネルギーは $|A^2|$ によって定まるから，音源の強さ $|A_0|$ が一定の場合に開口部から輻射されるエネルギーは

(153)　$$\cos kl = k\alpha \sin kl$$

を満足する場合に極大となる．すなわち音源の振動数が長さ l なる一端閉鎖管の規準振動数の一つと合致した場合に開口からの輻射が極大となる．よってこのような共鳴器は基音とその奇数次倍音を強める作用がある．

共鳴状態，すなわち（153）が満足される状態の場合には（151）より

(154)　$$\frac{A_0}{A} = \frac{-ik^2S(1+\mu)}{4\pi}\sin kl = \frac{\pi S(1+\mu)}{\lambda^2}\sin\frac{2\pi l}{\lambda}\cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

を得る．これは共鳴した場合に音源の強さ A_0 に対して開口部の体積速度 A を定める関係式であり，$S << \lambda^2$ であるから A は A_0 に比して著しく大きいことが知られる．すなわち共鳴した場合には開口部の体積速度 A は音源の体積速度 A_0 より著しく増大し，かつ A の位相は A_0 より $\frac{1}{4}$ 周期だけおくれている．

（151）を用いると（149）は

(155)　$$\phi = \frac{A}{kS}\left\{\sin kx + k\alpha\cos kx\,\frac{ik^2S(1+\mu)}{4\pi}\cos kx\right\}e^{-i\omega t}$$

と表わされるが，共鳴した場合には（153）を用いて

(156)　$$\phi = \frac{A}{kS\sin kl}\left\{\cos k(l-x) + \frac{ik^2S(1+\mu)}{4\pi}\sin kl\cdot\cos kx\right\}e^{-i\omega t}$$
$$= +\frac{i4\pi A_0}{k^3S^2\sin^2 kl}\left\{\cos k(l-x) + \frac{ik^2S(1+\mu)}{4\pi}\sin kl\cdot\cos kx\right\}e^{-i\omega t}$$

と表わすことができる．（156）の実数部は $A_0\cos\omega t$ なる音源に対応する音場を表わし

(157)　$$\phi = \frac{4\pi A_0}{k^3S^2\sin^2 kl}\left\{\cos k(l-x)\sin\omega t - \frac{k^2S(1+\mu)}{4\pi}\sin kl\cdot\cos kx\cdot\cos\omega t\right\}.$$

音源の位置 $(x=l)$ の音圧は

(158)　$$p - p_0 = \rho_0\frac{\partial\phi}{\partial t}\bigg]_{x=l} = \frac{4\pi\rho_0 cA_0}{k^2S^2\sin^2 kl}\left(\cos\omega t + \frac{k^2S(1+\mu)}{4\pi}\sin kl\cdot\cos kl\cdot\sin\omega t\right)\qquad(\mathrm{Pa})$$

となるが，この第一項は音源から輻射されるエネルギー流を形成する部分である．音源から輻射されるエネルギー流は

(159)　$$\overline{W} = \frac{1}{T}\int_0^T p\cdot A_0\cos\omega t\,dt = \frac{2\pi\rho_0 cA_0^2}{k^2S^2\sin^2 kl}\qquad(\mathrm{W})$$

であり，これは $\mu=0$ の場合に開口部で外向の発散波を作り出すのに消費されるエネルギーの消費速度

(160)　$$\overline{W}^{(i)} = \frac{1}{T}\int_0^T p^{(i)}\cdot\dot{q}^{(i)}dt\qquad(\mathrm{W})$$

と等しいことは容易に証明される．ここに $x=0$ における外向の体積速度は

(161)　$$\dot{q}^{(i)} = \frac{4\pi A_0}{k^2S(1+\mu)\sin kl}\sin\omega t\qquad(\mathrm{m^3/s})$$

である．

(158) の第二項は第一項に比して小さいから，音源の前面の音圧が極大となる時刻は音源から流出する体積速度の極大となる時刻とほとんど同期していることが示される．このような現象は，もしも音源の位置に弁があって空気溜から弁を通して管内に空気を吹き込むような場合には，[1] 弁が管内圧によって空気溜のある側へ（空気流と反対の方向に）変位した時に最大量の空気が管内に流入することを表わしている．空気量は弁の振動によって制御されるが，管内の空気の圧力のために弁の固有振動数はわずかに低められる傾向を生ずる．何となれば，弁に作用する外力が弁の変位とほとんど同相となっているということは振動系の振動数がその固有振動数よりやや低い値となっていることを示すものである．[2] このような状態で使用するように作られた弁を ”in-beating type ”の弁という．これとは異なる型の弁として，弁の弾性を小さくし，その振動数が共鳴空洞内の空気の反作用によって制御されるように作られたものがある．この場合の弁自身の固有振動数は空洞のそれに比してかなり低い．このような弁を ”out-beating type ”と呼び，弁が空気の流れる方向へ変位したときに空気の流入量が最大となる．人間の声帯 [3] はこの型に属する．

共鳴器の外部の音場は，音源の強さが $2\dot{q}^{(i)}$ なる点音源より輻射される音場として求めることができ，開口部から r なる距離の点の音場は

(162)
$$\phi = \frac{2\dot{q}^{(i)}}{4\pi r} = \frac{i2A_0}{k^2 S(1+\mu)\sin kl}\frac{e^{ikr-i\omega t}}{r} \qquad (kr >> 1)$$

となる．

4・5・9　２個の孔を有する共鳴器

１個の共鳴器に２個の小孔がある場合を扱って見よう．孔は互に干渉し合わない程度に離れているものとし，各孔の外向の体積変位を q_1 および q_2 ，各孔の導伝率を G_1 および G_2 と記すと，各孔の外向体積速度は４・４・１によって

(163)
$$\dot{q}_1 = G_1\phi\,, \qquad \dot{q}_2 = G_2\phi\,,$$

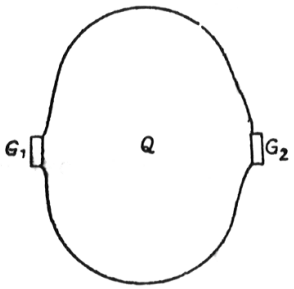
ただし

(164)
$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = c^2 s\,,$$

ここに Q は空洞の容積である．よって

(165)
$$\ddot{q}_1 + \frac{c^2 G_1}{Q}(q_1 + q_2) = 0\,,$$

(166)
$$\ddot{q}_2 + \frac{c^2 G_2}{Q}(q_1 + q_2) = 0\,.$$



第4・40図

（1）　オルガンのリードパイプはこの例である．
（2）　1・3 または第1・17図参照．　　（3）larynx.

この方程式の解の一つは

(168)　$$q_1 + q_2 = 0$$

であるが，これは空洞内の流体が振動せずに単に流れることを意味し，振動する解は

(169)　$$\frac{q_1}{G_1} = \frac{q_2}{G_2} = q_0 \cos(\omega_0 t + \alpha),$$

ただし

(169)　$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c^2(G_1 + G_2)}{Q}} \qquad (\mathrm{rad/s})$$

である．よって固有振動数は

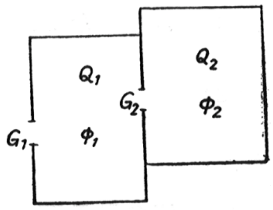
(170)　$$\nu_0 = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{G_1 + G_2}{Q}} \qquad (\mathrm{Hz}).$$

4・5・10　結 合 共 鳴 器

２個の共鳴器が１個の孔で結合されている場合には，各空洞の容積を Q_1 および Q_2 とし，孔を通して各空洞から流出する外向の体積変化を q_1 および q_2，それぞれの導伝率を G_1 および G_2 とすると，外向の体積速度は

(171)　$$\dot{q}_1 = G_1 \phi_1,$$

(172)　$$\dot{q}_2 = G_2(\phi_2 - \phi_1),$$



第4・41図

ここに

(173)　$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t} = c^2 s_1, \qquad \frac{\partial \phi_2}{\partial t} = c^2 s_2,$$

(174)　$$s_1 = -\frac{q_1 - q_2}{Q_1}, \qquad s_2 = -\frac{q_2}{Q_2}$$

で表わされる．これより

(175)　$$\ddot{q}_1 + \frac{c^2 G_1}{Q} q_1 - \frac{c^2 G_1}{Q} q_2 = 0,$$

(176)　$$\ddot{q}_2 + c^2 G_2 \left(\frac{1}{Q_1} + \frac{1}{Q_2}\right) q_2 - \frac{c^2 G_2}{Q} q_1 = 0$$

を得る．この解が $\cos(\omega t - \varphi)$ の形で振動するものと仮定すると，決定式は

(177)　$$\left(\omega^2 - \frac{c^2 G_1}{Q_1}\right)\left(\omega^2 - \frac{c^2 G_2}{Q_2}\right) - \frac{c^2 G_2}{Q_1}\omega^2 = 0.$$

(177) にて $\omega^2 = 0$ または ∞ とおくとその左辺は正となり，また

(178)　$$\omega^2 = \frac{c^2 G_1}{Q_1} \qquad \text{または} \qquad \frac{c^2 G_2}{Q_2}$$

とおくと (177) の左辺は負となる．よって (177) の一根 ω_1 は 0 と (178) の小さい方の値との間にあり，もう一根 ω_2 は (178) の大きい方と ∞ の間にある．さらに (175) は

(179)
$$\left(\omega^2 - \frac{c^2 G_1}{Q_1}\right) q_1 + \frac{c^2 G_2}{Q_1} q_2 = 0$$

と書けるので，$\omega = \omega_1$ なる振動をする場合には q_1 と q_2 は同符号となり，$\omega = \omega_2$ の場合には逆符号となる．q_1 と q_2 とが同符号であるということは，q_1 が空洞 Q_1 から外に向って流れ出す時刻に q_2 は空洞 Q_2 から Q_1 に向って流れ出すことを意味している．

以上により，結合空洞は 1・4 の結合振子のような規準振動姿態を有することが知られる，なお BATHE [4] が最近この問題を詳細に検討している．

4・6　音波の減衰および吸収

音波が伝播する途中でエネルギーの損失がある場合の減衰については，抵抗係数の概念を導入して 3・6 で既に述べておいた．しかし自由な大気中を伝播する音波が空気の粘性のみによって減衰する場合には，空気の粘性係数によって減衰量を表わすことができる．その結果は，周波数が著しく高くない限り僅かの減衰しか生じないので，実用上余り重要な問題ではないことが判明する．しかし固定壁面の近傍や細い管または狭い間隙の中では，粘性による減衰が著しく効果を現わすことも明らかにされている．このことは音響エネルギーの吸収と関連し，吸音物質の理論的基礎を与える．

4・6・1　粘　　性

運動している流体内に生ずる応力は，例えば静圧力のようにあらゆる方向に一様に作用するような形とはならずに，変形速度に関係した一定量だけ異なった分布をする．このことが粘性の本質となって居り，上記の一定量はヒズミ速度の一次函数であると仮定するのが普通である．この仮定はヒズミ速度が無限小であると見なされる場合には常に正しい．更らに2・3・1で述べたように，任意の時刻および任意の場所におけるヒズミの３主軸が存在し，これが必然的に各対応する応力の３主軸に一致するものと仮定する．よってヒズミと応力の関係を2・3・1の (29) に倣って

(1)
$$\begin{aligned} p_1 &= -p + \lambda' \dot{\Delta} + 2\mu' \dot{\varepsilon}_1 , \\ p_2 &= -p + \lambda' \dot{\Delta} + 2\mu' \dot{\varepsilon}_2 , \\ p_3 &= -p + \lambda' \dot{\Delta} + 2\mu' \dot{\varepsilon}_3 \end{aligned}$$

と表わす．ここに $\dot{\varepsilon}_j$ は第 j 軸方向の主ヒズミ速度であり

(2)
$$\dot{\Delta} = \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 + \dot{\varepsilon}_3 ,$$

また μ' は平行平面内の剪断運動に対する粘性抵抗を表わす係数である．よって $\dot{\eta}$ を剪断ヒズミ速度

(4)　M.A.BATHE : "Theory of Diffraction by Small Holes"　Phys. Rev., Vol.66, p.163－182. 1944.

とすれば，剪断応力は

（3）　$q = \mu' \dot{\eta}$　　$(\mathrm{N/m^2})$

と表わされ，これより色々の液体や気体の粘性係数　$\mu'(\mathrm{Pa \cdot s})$　がかなりの確度で測定される．

(1) の p および λ' の表わす意味は定まらない．その理由は $\dot{\Delta}$ に任意定数を乗じたものを (1) の p に加えても (1) の形はなんら変更されないことによる．事実，液体の場合にはこのようなことが成立する．しかし気体に適用する場合には p は気体の示性式

（4）　$p = R\rho\theta$

によって定義された方が便利である．しかし現在の知識では気内の 1 点の周囲の平均圧力がどの位であるかという実験的確証がない．すなわち

（5）　$$\frac{1}{3}(p_1 + p_2 + p_3) = -p + \left(\lambda' + \frac{2}{3}\mu'\right)\dot{\Delta}$$

が $-p$ からどれだけ異なっているかが不明である．しかし MAXWELL [1] (1866) が静運動学的気体論に基づいて推論した所によると，この両者は同一のものでなければならず，したがって

（6）　$$\lambda' = -\frac{2}{3}\mu' \qquad (\mathrm{Pa \cdot s})$$

と考えられる．

粘性係数の次元は応力と時間との積であり

$$\mu' = [\mathrm{Pa \cdot s}],$$

また μ' は密度 ρ には無関係であるが，温度の上昇と共に増大する．実際に粘性が運動におよぼす影響は μ'/ρ_0 の形で表わされるので，MAXWEEL はこれを静運動学的粘性係数 [2] と呼んでいる．

単位立方体の表面の応力が，その立方体の大きさや形を変えるためになす仕事の速度は

（7）　$$\overline{W} = p_1\dot{\varepsilon}_1 + p_2\dot{\varepsilon}_2 + p_3\dot{\varepsilon}_3 = -p\dot{\Delta} + \lambda'\dot{\Delta}^2 + 2\mu'(\dot{\varepsilon}_1^2 + \dot{\varepsilon}_2^2 + \dot{\varepsilon}_3^2)$$
$$= -p\dot{\Delta} + \frac{2}{3}\mu'\left\{(\dot{\varepsilon}_2 - \dot{\varepsilon}_3)^2 + (\dot{\varepsilon}_3 - \dot{\varepsilon}_1)^2 + (\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_2)^2\right\} \qquad (\mathrm{W})$$

となり，$-p\dot{\Delta}$ は立方体内に貯えられるエネルギーの増加速度を表わしているが，第二項は単位体積の気体中で粘性のために消費されるエネルギー消費速度を表わしている．このようにして消費されたエネルギーは熱エネルギーに変換される．ここで注意すべきことは，一様な膨脹の場合には $\dot{\varepsilon}_1 = \dot{\varepsilon}_2 = \dot{\varepsilon}_3$ であるから (7) の第二項は消滅し，粘性によるエネルギー消費は生じないことである．これは最初に述べた粘性に関する本質を表わしている．また純剪断運動の場合には (7) は

（8）　$$\overline{W} = q\dot{\eta} = \mu'\dot{\eta}^2 \qquad (\mathrm{W})$$

となる．

（1）　James Clerk MAXWELL (1831-79) : Cambridge の実験物理学教授(1831-79), ” The Electromagnetic Theory of Light”を著す．

（2）　kinematical coefficient of viscosity,　μ'/ρ_0

4・6・2　粘性流体内の平面波

粘性流体内を平面波が伝播する場合には

(9)　$$\dot{\varepsilon}_2 = \dot{\varepsilon}_3 = 0$$

とおくことができるので，(1) と (6) とより

(10)　$$p_1 = -p + \frac{4}{3}\mu'\dot{\varepsilon}_1 = -p_0 - \kappa s + \frac{4}{3}\mu'\dot{\varepsilon}_1$$

となる．軸 (1) を x 軸とし，x 軸方向の変位を ξ とすれば

(11)　$$s = -\frac{\partial \xi}{\partial x}, \qquad \dot{\varepsilon}_1 = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)$$

と表わされる．よって運動の方程式

(12)　$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial p_1}{\partial x}$$

は

(13)　$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{4}{3}\frac{\mu'}{\rho_0}\frac{\partial^3 \xi}{\partial x^2 \partial t}$$

と表わされる．

音源が ω なる角周波数を有する場合について (13) を解くには，解の形を

(14)　$$\xi = \xi_0 e^{\gamma x - i\omega t}$$

と仮定し，(13) に代入すると

(15)　$$\gamma^2 = -\frac{\omega^2}{c^2 - \frac{4}{3} i\omega \frac{\mu'}{\rho_0}}.$$

しかるに $\omega\mu'/\rho_0$ は非常に小さい値であるから (15) は

(16)　$$\gamma = \pm \frac{i\omega}{c}\left(1 + \frac{2}{3}\frac{i\omega\mu'}{\rho_0 c^2}\right) = ik \mp \beta,$$

(17)　$$k = \frac{\omega}{c}, \qquad \beta = \frac{2}{3}\frac{\omega^2\mu'}{\rho_0 c^3} = \frac{8\pi^2}{3\lambda^2}\frac{\mu'}{\rho_0 c}$$

となり，解は

(18)　$$\xi = \xi_0 e^{-\beta x + i(kx - \omega t)}$$

となる．なお

(19)　$$L = \frac{1}{\beta} = \frac{3\rho_0 c^3}{2\omega^2\mu'} = \frac{3\rho_0 c}{8\pi^2\mu'}\lambda^2 \qquad (\mathrm{m})$$

は振幅が $\frac{1}{e}$ に減衰するまでの距離を表わし，λ は音波の波長である．空気中の音波の場合には $(\mu'/\rho_0) \approx 0.132 \times 10^{-4}\,(\mathrm{m}^2/\mathrm{s})$ であるから $L = 9.56\lambda^2 \times 10^5\,(\mathrm{m})$ となり $\lambda = 0.1\,(\mathrm{m})$ の場合

には　$L = 9.56\ (\mathrm{km})$　となる．また（13）の解を

(20)　$$\xi = f(t)\cos kx$$

と仮定して（13）に代入すると，$f(t)$　は

(21)　$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \frac{4}{3}\frac{\mu'}{\rho_0}k^2\frac{df}{dt} + k^2c^2 f = 0$$

の解でなければならず，これより

(22)　$$f(t) = Be^{-\frac{t}{\tau}}\cos(\omega t - \varphi),$$

(23)　$$\tau = \frac{3}{2}\frac{\rho_0}{\mu' k^2},$$

(24)　$$\omega^2 = k^2c^2 - \frac{1}{\tau^2}$$

であることを必要とすることになり，解は

(25)　$$\xi = Be^{-\frac{t}{\tau}}\cos(kct - \varphi)\cdot\cos kx$$

となる．ただし　$(1/kc\tau) << 1$．（25）は定在波を表わしているが，同様の方法で　$\sin kx$　を含む解が求められるので，両方を結合すると

(26)　$$\xi = Ce^{-\frac{t}{\tau}}\cos k(ct - x)$$

なる平面進行波の解が得られる．（18）の実数部と（26）とは同一の現象を表現したものである．（26）より空気中の平面波の減衰率は　$\tau = 0.288\lambda^2 \times 10^4\ (\mathrm{sec})$　となる．

平面波の波頭面の単位面積を貫いて流れるエネルギー流

(27)　$$\overline{w}_0 = \frac{1}{2}\rho_0 c\omega^2\left|\xi_0\right|^2 \qquad (\mathrm{W/m^2})$$

は媒質内で粘性のために消費されるエネルギーを補っていることが容易に示される．波頭面の単位面積を底とする筒の中で粘性によって消費されるエネルギーは（7）の第二項で表わされ，$k >> \beta$　の場合には

(28)　$$w_d = \frac{4}{3}\mu'\int_0^\infty \dot{\varepsilon}_1^2 dx = \frac{4}{3}\mu'\int_0^\infty\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial t}\right)^2 dx$$
$$\approx \frac{4}{3}\mu'\frac{\omega^4\left|\xi_0\right|^2}{c^2}\int_0^\infty e^{-\frac{2x}{L}}\cos^2\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)dx \qquad (\mathrm{W/m^2})$$

となるが

(29)　$$\cos^2\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

を用いて時間平均を取ると

(30)　$$\overline{w}_d = \frac{4}{3}\mu'\frac{\omega^4\left|\xi_0\right|^2}{c^2}\cdot\frac{L}{4} = \frac{1}{2}\rho_0 c\omega^2\left|\xi_0\right|^2 = \overline{w}_0 \qquad (\mathrm{W/m^2})$$

となる．

4・6・3　空気の熱伝導および熱輻射による減衰

気体が圧縮または膨脹する際には当然その部分の温度が局部的に上昇または下降する．この温度が気体の熱伝導または熱輻射によって周囲の部分に伝わると音のエネルギーの損失の原因となる．これは STOKES および KIRCHHOFF が詳細に論じたが，その結果，空気中の音波は粘性による損失と同じ程度の損失を熱損失によって生ずることが確められた．詳細は文献 [1] を参照されたい．

4・6・4　実測による抵抗係数の決定および応用例

空気の粘性と熱損失とに起因する平面波の減衰定数 β または抵抗係数 [1] σ は

(31)
$$\frac{\sigma}{2c} = \beta = \frac{1}{2\rho_0 c}\frac{\omega^2}{c^2}\left(\frac{4}{3}\mu' + \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{q'}{c_v}\right) \qquad (1/\mathrm{m}),$$

ここに

(32)
$$\mu' = 1.878\times10^{-5}(1+0.000366\theta) \qquad (\mathrm{Pa\cdot s}) \quad \cdots (\text{空気の粘性係数}),$$

(33)
$$q' = 5.52\times10^{-5}(1+0.0029\theta) \qquad [\mathrm{cal/(s\cdot cm\cdot {}^\circ C)}]$$
$$= 2.185\times10^{-5}(1+0.0029\theta) \qquad [\mathrm{W/(m\cdot K)}] \quad \cdots (\text{空気の熱伝導係数}),$$
$$c_p = 0.2375\ [\mathrm{cal/(g\cdot {}^\circ C)}] = 0.995\times10^3\ [\mathrm{J/(kg\cdot K)}] \quad \cdots (\text{空気の恒圧比熱}),$$
$$c_v = c_p/\gamma = 0.705\times10^3\,[\mathrm{J/(kg\cdot K)}] \quad \cdots (\text{空気の恒容比熱}),$$
$$\rho_0 = 1.3 \quad (\mathrm{kg/m^3}), \qquad \gamma = c_p/c_v \approx 1.414,$$

(34)
$$c = c_0\sqrt{1+\frac{\theta}{273}}, \qquad c_0 = 332\ (\mathrm{m/s}), \qquad \theta \cdots \text{気温}\ {}^\circ\mathrm{C}$$

であるから温度をパラメーターとして周波数 ν(Hz) と β との関係を示すと第4・3表のようになる．これを見ると ν が 10^4(c/s) においても β は 0.002 の程度であるから近距離伝播の場合には空気の粘性や熱伝導による減衰は余り問題にするほどのものではない．

第4・3表

温度	$\theta=0°C$		$\theta=15°C$		$\theta=30°C$	
速度	$c=332$ (m/s)		$c=340$ (m/s)		$c=350$ (m/s)	
減衰定数一般式	$\beta=\frac{0.955}{\lambda^2}\times10^{-6}$		$\beta=\frac{0.956}{\lambda^2}\times10^{-6}$		$\beta=\frac{0.962}{\lambda^2}\times10^{-6}$	
ν(Hz)	$\lambda=\frac{c}{\nu}$	β	λ	β	λ	β
10^2	3.32 m	2.875×10^{-7}	3.40 m	2.81×10^{-7}	3.50 m	2.75×10^{-7}
10^3	0.332	2.875×10^{-5}	0.340	2.81×10^{-5}	0.350	2.75×10^{-5}
10^4	0.0332	2.875×10^{-3}	0.0340	2.81×10^{-3}	0.0350	2.75×10^{-3}

しかるに地面および雪面上での音の伝播に際して，伝播距離 50(m) で減衰が 10(dB)（地面に接

(1)　Lord RAYLEIGH : "Theory of Sound" Chap. XIX.
　　H.LAMB : "Dynamical Theory of Sound" § 65.
(1)　抵抗係数については3・6参照.

した場合)，距離 20(m) で減衰が 20(dB) (雪面に接した場合) なる測定結果が得られている[2]．前者は $\beta \approx 0.02$，後者は $\beta \approx 0.15$ に相当し，地面や雪面の附近では異常に大きな減衰が存在すると考えられる (第3・40図参照)．この場合に音の伝播速度をも測定しておけば抵抗係数 σ が3・6の (18) より決定される．

遠拒離伝播の例として1950年9月23日の浅間山爆発時の爆音の強さを推定してみよう．報告によれば，爆音到達距離は川越，名古屋，御殿場，福井など約半径 200km の範囲であり火口より 19km の地点で多数のガラスが破壊されたとのことである．[3] 遠方で聞く爆音をかりに 100(Hz) とし，耳の最低可聴限界に騒音レベルを加味して，爆音の到達し得る限界の音の強さを

(35)　　$\overline{w} = 10^{-8}$　$(\mathrm{W/m^2})$　・・・強さのレベルで 40(dB)

と仮定すると，半球面に輻射されると仮定した爆音の音響出力 $\overline{\mathrm{W}}$ が求められる．減衰定数 β を色々に仮定して計算すると推定音響出力は第4・4表のようになり β が 10^{-6} 程度とすれば音響出力は数キ

第4・4表

β	0	1.905×10^{-7}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}
$\overline{W}$	2.51×10^{3}	2.7×10^{3}	3.75×10^{3}	1.372×10^{5}	5.9×10^{21}

ロワットにすぎない．爆音の伝播には大気の上層の状態が影響すると思われるが，粘性と熱損失とによる $\beta = 2.81\times10^{-7}$ に対して実際の減衰定数が 10^{-5} 以上に大きくなっているとは想像されない．よって爆音の出力は大きく見積っても 10^{5}(W)，普通の状態では数キロワット程度である．なお風が吹いていたとしても風速 10(m/s) 程度では，この計算値に10％程度の修止を加えるにすぎない．火口から 20km の地点の音の強さは，$\overline{\mathrm{W}} = 2.71\times10^{3}$ と仮定したときには

$$\overline{w} = 4.31\times10^{-6} \quad (\mathrm{W/m^2}) \quad 約 \quad 65(\mathrm{dB})$$

$\overline{\mathrm{W}} = 1.372\times10^{5}$ (W) と仮定したときには

$$\overline{w} = 1.79\times10^{-4} \quad (\mathrm{W/m^3}) \quad 約 \quad 83(\mathrm{dB})$$

であって，いずれも可聴範囲の強さであり，ガラスが破れるほどの圧力は生じそうにない．事実ガラスが破れるほどの音圧が生じたとすれば鼓膜も破れる筈であるが，そのような事実を耳にしていない．

ガラスの破損は爆風によるものと考え，爆風を 1(Hz) の振動と仮定し，火口から 20km の地点で 1,000(cm²) につき 10(kg) の圧力が作用したと仮定すると，この地点の爆風の速度振幅は $\left|\dot{\xi}_r\right| = 23(\mathrm{m/s})$，火口から 1km の地点では $\left|\dot{\xi}_r\right| = 54.6(\mathrm{m/s})$ となり，1km の半球面を外向きに通過するエネルギー流は，$\beta = 10^{-4}$ と仮定した場合に

(2)　中島博美 ： 日本音響学会講演会要旨．昭和25年5月．
(3)　科学文化新聞．

$$\overline{W}_1 = 17.2\times 10^{12} \qquad (\mathrm{W})$$

エネルギー流密度は

$$\overline{w}_1 = 2.73\times 10^{9} \qquad (\mathrm{W/m^2})$$

となる．よって 1(Hz) 程度の爆風は異常に大きな出力を有しているが音声周波の出力はそれほど大きなものではないことが推定される．

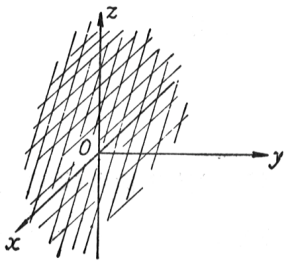
4・6・5　細い管または狭い間隙の中の音波の減衰

前節に述べたことから見てもわかるように，粘性の影響は空気が地面とか室内の壁面とかあるいは共鳴器または音響管の壁面に接しながら流動する場合に著しく現われる．２媒質が接触している境界面上では，両媒質は同一の速度で運動する筈であるから両媒質内の相対的の速度は消滅していると見なさなければならないのに，通常の理論的取扱においては固体の境界面上の流体が切線方向に自由に流動し得ると仮定している．そのために固体の表面の抵抗は無限大であるかのような形で表わされる．しかし詳細に調べて見ると，音波で扱うような振動数の範囲では，壁面の影響の現われる範囲は壁に接したきわめて薄い層の範囲内に局限されることがわかるので，その影響は壁面の近傍を除けば余り重要視する必要がない．

剛体壁平面を $y=0$ とし，$y\geq 0$ の範囲を満たしている空気の単位質量に

(36)　$$f = f_0 e^{-i\omega t} \qquad (\mathrm{N/kg})$$

なる力が Ox 方向に作用したと仮定する．f が x に無関係に一定な形で分布しているものとすれば密度の変化（したがって凝縮）は生じないから，変形は zx 面に平行な剪断運動の形となる．いま流体の変位の x 成分を ξ，速度の x 成分 u とすると剪断ヒズミ速度は



第4・42図

(37)　$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) = \frac{\partial u}{\partial y}$$

と表わされる．よって zx 面に平行な平面上の剪断応力は [1]

(38)　$$q = X_y = \mu' \frac{\partial u}{\partial y} \qquad (\mathrm{N/m^2}),$$

二つの平行平面 y および $y+\delta y$ で挟まれた層が受ける応力は

(39)　$$X_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu' \frac{\partial u}{\partial y}\right)\delta y \qquad (\mathrm{N/m^2}),$$

したがって運動の方程式は

(40)　$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho_0}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f\ .$$

(40) の解は

（1）　q が作用する面の法線は $+y$ 方向を向くものとする．

(41)
$$u=\left(\frac{f_0}{-i\omega}+Ae^{\gamma}y^{y}\right)e^{-i\omega t}\ ,$$
$$\gamma_y^{\ 2}=\frac{-i\omega\rho_0}{\mu}$$

と表わされるから，これより

(42)
$$\gamma_y=\sqrt{\frac{-i\omega\rho_0}{\mu}}=\pm\sqrt{\frac{\omega\rho_0}{2\mu'}}\,(1\pm i)=\pm\beta_y(1\pm i)$$

と定まり，$y\to\infty$ で速度の x 成分 u が有限であるためには

(43)
$$\gamma_y=-\beta_y(1-i)$$

でなければならぬ．また壁面上の条件として　$y=0$ で $u=0$ を満足するためには

(44)
$$A=\frac{f_0}{i\omega}$$

であることを必要とする．よって（40）の解は

(45)
$$u=\frac{if_0}{\omega}\left\{1-e^{-(1-i)\beta_y y}\right\}e^{-i\omega t}\ ,$$

またはその実数部をとると，

(46)
$$u=\frac{f_0}{\omega}\sin\omega t-\frac{f_0}{\omega}e^{-\beta_y y}\sin(\omega t-\beta_y y)$$
$$=\frac{f_0}{\omega}\left[(1-e^{-\beta_y y}\cos\beta_y y)\sin\omega t+e^{-\beta_y y}\sin\beta_y y\cdot\cos\omega t\right].$$

(46) は剛壁平面附近の流体の切線方向の速度の分布を表わしていて，$\beta_y y$ が十分に大きければ速度分布は（46）の第一項だけで表わされ，この場合には壁面が存在しない場合の流体の速度に等しくなる．よって（46）より，壁面の近傍の速度が粘性によって影響される範囲 δ_0 が推定され，その範囲は

(47)
$$y\le\delta_0\approx\frac{2\pi}{\beta_y}=\sqrt{\frac{8\pi\mu'}{\omega\rho_0}}=\sqrt{\frac{4\mu'}{\rho_0\nu}}=\sqrt{\frac{4\mu'}{\rho_0 c}\lambda}\qquad(\mathrm{m})$$

となる．ここに

(48)
$$e^{-\delta_0}\approx\frac{1}{535}\,.$$

例として空気中の音場の場合を示すと，$(\mu'/\rho_0)=0.132\times10^{-4}$，$\nu=256\,(\mathrm{Hz})$ であるから

(49)
$$\delta_0\approx\frac{1.29\times10^{-2}}{\sqrt{\nu}}\approx0.80\times10^{-4}\qquad(\mathrm{m}).$$

この結果を見ると，剛壁平面上の大気の切線方向の流動に対して，粘性の影響は壁面から非常に僅かな距離の範囲にしかおよばないことが示されたが，管の中の音波の場合にはやや異なってくる．管の断面の大きさが波長に比べれば小さいが，δ_0 に較べて十分大きい場合には粘性によって管内音波の伝播速度が変化することが示される．まず（38）と（41）を用いて壁面上の流体の剪断応力を表わす

と[(2)]

(50)
$$X_y = -q = -\mu' \frac{\partial u}{\partial y} = -(1+i)\frac{\mu' \beta_y f_0}{\omega} = \frac{-(1+i)}{4\pi}\delta_0 \rho_0 f_0 .$$

管の断面が半径 a なる円形であるものとし，断面上の空気の圧力の平均値を p として管の壁面が管の δx なる長さの部分に含まれる空気におよぼす力を求めると

(51)
$$\delta f = \frac{(1+i)}{2} a\delta_0 \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}\delta x$$

と表わされる．よって δx なる区間内の空気の速度の断面上の平均値を $\bar{u}$ とすれば，運動の方程式は

(52)
$$\pi \rho_0 a^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\pi a^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{(1+i)}{2} a\delta_0 \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} ,$$

または

(53)
$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}\left\{1-(1+i)\frac{\delta_0}{2\pi a}\right\}$$

と表わされる．ただし $\bar{s}$ を凝縮の断面上の平均値とすれば

(54)
$$\bar{p} = p_0 + \rho_0 c^2 \bar{s} ,$$
$$\frac{\partial \bar{s}}{\partial t} = -\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$$

なる関係がある．これより $\bar{p}$ と $\bar{s}$ とを消去すると平均速度 $\bar{u}$ の満足すべき関係式は

(55)
$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = \left\{1-(1+i)\frac{\delta_0}{2\pi a}\right\} c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} .$$

(55) の解は

(56)
$$\bar{u} = \bar{U}_0 e^{\gamma_x x - i\omega t} ,$$
$$\gamma_x^2 = \frac{-\left(\frac{\omega}{c}\right)^2}{\left\{1-(1+i)\frac{\delta_0}{2\pi a}\right\}}$$

であるから， $\delta_0/a << 1$ であることより

(57)
$$\gamma_x \approx \pm \frac{i\omega}{c}\left\{1+(1+i)\frac{\delta_0}{4\pi a}\right\} = \mp \beta_x \pm i\alpha_x .$$

よって

(58)
$$\alpha_x = \frac{\omega}{c}\left\{1+\frac{\delta_0}{4\pi a}\right\} = \frac{\omega}{c'} ,$$
$$\beta_x = \frac{\omega\delta_0}{4\pi ac} = \frac{\delta_0}{2a\lambda_0} = \frac{1}{a\lambda_0}\sqrt{\frac{\mu'}{\rho_0}}$$

と表わされ，管内を x 方向に進行する音波の振動速度は

(2)　壁面上の流体から壁面を見たときの zx 面に平行な面の法線は $-y$ 方向を見ている．

(59)　$$\bar{u} = \bar{U}_0 e^{-\beta x^s} \cdot e^{-i\omega(t - x' e')}$$

または実数形を用いて

(60)　$$\bar{u} = \bar{U}_0 e^{-\beta x^s} \cos\omega\left(t - \frac{x}{c'}\right) \qquad (\mathrm{m/s}),$$

ただし

(61)　$$c' = c\left(1 - \frac{\delta_0}{4\pi a}\right) \qquad (\mathrm{m/s}).$$

この結果より，細い管の内の音波の位相速度 c' は広い大気中の音速 c より小さくなっており，したがって x 方向の管内波長 $\lambda_{x'} = 2\pi c'/\omega$ は自由空間波長 $\lambda_0 = 2\pi c/\omega$ より短かくなっていることが知られ，かつ管内波の減衰定数は（58）の β_x で与えられることが示される．よって速度が $\frac{1}{e}$ まで減衰する距離 L_x は

(62)　$$L_x = \frac{1}{\beta_x} = \frac{2a}{\delta_0}\lambda_0 \qquad (\mathrm{m}).$$

これと広い自由空間内の減衰定数（19）とを比較すると

(63)　$$\frac{\beta}{\beta_x} = \frac{L}{L_x} = L\beta_x = \frac{3c}{8\pi^2}\sqrt{\frac{\rho_0}{\mu'}}\,\frac{\lambda_0}{a} \approx 3.55\times 10^3\,\frac{\lambda_0}{a}$$

となる．よって自由波長 λ_0 に比して断面が小さい管内の音波は，自由な空間内の音波より遙かに減衰が大きくなることがわかる．

また管の中の長さ l なる区間で消費されるエネルギーの時間平均値は（28）より

(64)　$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{W}} &= \frac{4}{3}\mu' S\int_0^l\left[\frac{1}{T}\int_0^T\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}\right)^2 dt\right]dx \\ &= \frac{4}{3}\mu' S\,\frac{\bar{U}_0^{\,2}}{4\beta_x}\left(\frac{\omega^2}{c'^2} + \beta_x^2\right)(1 - e^{-2\beta_x l}) \\ &\approx \frac{\mu'\omega^2}{3c'^2}\bar{U}_0^{\,2} S L_x (1 - e^{-2l/L_x}) \qquad (\mathrm{W})\end{aligned}$$

と表わされる．ここに S は管の断面積，L_x は（62）で与えられる．(64) は単位時間に管内で吸収される音響エネルギーである．

管内の伝播速度を与える式（61）はHELMHOLTZ（1863）が証明せずに示している．その証明はLord RAYLEIGH によって与えられているが，さらに熱損失による影響をも含めた完全な研究成果がKIRCHHOFF（1868）によって与えられている．その結果は（31）に示してある通り，空気の熱損失の影響と粘性による影響とは同程度である．

管の太さが（47）の δ_0 と同程度またはそれ以下である場合には，管壁は総体的に見て広い範囲の管内の空気の運動に影響をおよぼすために，管内の空気の運動はマサツ抵抗のために全く変った状態となる．特に（47）の δ_0 が管の太さより大きい場合には流体の質量はその運動に対してほとんど影響しなくなり，管内の流体の断面上の平均速度は管長方向の圧力傾度と管壁とのマサツ抵抗とによる静力

学的平衡条件で大体定まってしまう．このような場合には，R を管のマサツ抵抗とすれば[3]

(65)
$$R\bar{u} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial t},$$

一方細い管の中の空気は熱量の移動が自由に生ずるものと見なされるので等温変化をするものと考えられ，BOYLEの法則により

(66)
$$\bar{p} = p_0(1+\bar{s}),$$

(65)(66)および(54)を用いて $\bar{p}$ と $\bar{s}$ とを消去すると平均速度を規定する関係は

(67)
$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \frac{p_0}{R}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}$$

となり，熱伝導方程式[4]と同形となる．これを解くと

(68)
$$\bar{u} = U_0 e^{-\alpha' x^x + i(\alpha' x^x - \omega t)},$$
$$\alpha_{x'} = \sqrt{\frac{\omega R}{2p_0}}$$

となるから，実数部をとれば

(69)
$$\bar{u} = U_0 e^{-\alpha' x^x}\cos(\omega t - \alpha_{x'} x).$$

となり，管内波長は

(70)
$$\lambda_{x'} = \frac{2\pi}{\alpha_{x'}} = \sqrt{\frac{8\pi^2 p_0}{\omega R}} = \sqrt{\frac{4\pi p_0}{\nu R}} \quad (\mathrm{m}),$$

振幅が $\frac{1}{e}$ に減衰する距離は

(71)
$$L_{x'} = \frac{1}{\alpha_{x'}} = \sqrt{\frac{2p_0}{\omega R}} = \sqrt{\frac{p_0}{\pi \nu R}} \quad (\mathrm{m})$$

である．なお管内で消費されるエネルギーは(64)で与えられる．

抵抗 R を求めるには，現象が非圧縮流体の仮定の成立する範囲にあると考えられるので，外圧によって毛細管[5]の中を流れる定常流の場合と同じ方法で決定できる．[6] 半径 a なる円形断面の毛細管の場合には，管内の半径 r なる同軸円筒面の δx なる区間に作用する剪断応力は $\mu'(\partial u/\partial r)\cdot 2\pi r\cdot \delta x$ であるから，この部分の厚さ δr なる中空円筒の両面に作用する軸方向（x 方向）の力は

(72)
$$\delta f = 2\pi\mu'\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\delta r\cdot\delta x,$$

厚さ δr なる中空円筒の断両積は $2\pi r\delta r$ であるから，軸方向の圧力傾度は

(73)
$$\frac{\partial p}{\partial x} = \lim_{\delta x\to 0}\left[\frac{\delta f}{2\pi r\delta r}\right] = \frac{\mu'}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mu}{\partial r}\right)$$

---

(3)　Rは流体の性質と管の断面の形およびその長さで定まる．
(4)　equation of linear conduction of heat.
(5)　capillary tube
(6)　この抵抗を flow resistance と呼ぶ．

となり，x に無関係な量となる．また一方径方向の運動はないから $\frac{\partial p}{\partial r}=0$ であり，したがって p および $\frac{\partial p}{\partial x}$ は r にも無関係である．(73) の解は

(74)　$$u = A + Br^2$$

と書くことができる．ここに A および B は積分定数であって，壁面で滑りがないこと，すなわち

$$r = a \quad \text{にて} \quad u = 0$$

より

(75)　$$B = -\frac{A}{a^2}, \quad \text{したがって} \quad u = \frac{A}{a^2}(a^2 - r^2)$$

を得るから，これを (73) に代入すると

(76)　$$A = -\frac{a^2}{4}\frac{\partial p}{\partial x},$$

よって速度は

(77)　$$u = -\frac{a^2 - r^2}{4\mu'}\cdot\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right).$$

これより管の断面上の速度の平均値は

(78)　$$\bar{u} = \frac{1}{\pi a^2}\int_0^a u\cdot 2\pi r\,dr = \frac{-a^2}{8\mu'}\cdot\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)$$

となるから円形断面の毛細管の抵抗は

(79)　$$R = \frac{8\mu'}{a^2} \qquad (\mathrm{Pa\cdot s/m^2})$$

となる．なお毛細管から流出する体積速度は

(80)　$$\dot{q} = \pi a^2\bar{u} = \frac{-\pi a^4}{8\mu'}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) \qquad (\mathrm{m^3/s})$$

と表わされ圧力傾度に比例しかつ半径 a の４案に比例している．これを POISEUILLE [7]の法則 (1844) という．これは粘性係数 μ' を測定する基礎になっている．

楕円形断面の抵抗も円形の場合と同様の方法で解くことができ，BOUSSINESQ (1868) が初めて求めた結果は

(81)　$$R = 4\mu'\frac{(a^2+b^2)}{a^2b^2} \qquad (\mathrm{Pa\cdot s/m^2}),$$

ただし a b はそれぞれ楕円の長軸および短軸の半分を表わす，(81) にて $a \Rightarrow \infty$ とおくと，間隔が $2b$ なら平行平面で挟まれた狭い間隔（溝）の抵抗となり，その値は

(82)　$$R = \frac{4\mu}{b^2} \qquad (\mathrm{Pa\cdot s/m^2})$$

である．

---

(7)　J.L.M.POISEUILLE :(1799-1869)．パリーの開業医．毛細血管内の血の循環について興味を有していた．

管または間隙の抵抗の形が求められると，この中の音波の減衰は（68）から計算できる．（68）は位相定数と減衰定数が同じ大きさ $\alpha_{x'}$であるから，x 方向に１波長進行する距離 $x=\lambda_{x'}$ の間に振幅は $e^{-2\pi}=\dfrac{1}{535}$ に減衰する．円形断面の管についてこれを計算してみると，（68）と（79）とより

(83)
$$\alpha_{x'}{}^2=\frac{4\mu'\omega}{a^2 p_0}$$

であるから管内波長 $\lambda_{x'}$ と自由波長 $\lambda_0=2\pi c/\omega$ との比は

(84)
$$\left(\frac{\lambda_{x'}}{\lambda_0}\right)^2=\left(\frac{\omega}{\alpha_{x'}}\right)^2=\frac{a^2\omega}{4}\left(\frac{\rho_0}{\mu'}\right)\left(\frac{p_0}{c^2\rho_0}\right)\approx\frac{a^2\omega}{4}\left(\frac{\rho_0}{\mu'}\right)=\frac{\pi a^2}{2}\frac{\rho_0 c}{\mu'\lambda_0}$$

となり，管内波が $\dfrac{1}{535}$ に減衰する距離は

(85)
$$\lambda_{x'}=\sqrt{\frac{\pi a^2}{2}\frac{\rho_0 c}{\mu}\lambda_0}\qquad(\mathrm{m})$$

で与えられる．[8] 管径 a が小さい場合には（85）は自由波長 λ_0 よりも小さくなる．よって毛細管内の音波はその１自由波長を伝播する間に著しく減衰することが知られる．[9] なお消失した音響エネルギーはすべて熱エネルギーに変換される．

以上の理論は多孔性物質[10]の中の音波の吸収に利用することができ，また室内の音波が幕や敷物によって吸収されることを利用して室内音の残響や反響の防止およびその調整を行うための理論的基礎を与える．なお多孔性物質内の音場についてはMORSE[11]が更に詳しい研究を行っている．

閉じた室の中で音波が減衰するためには，必らず粘性とか熱損失のようなエネルギー消費 を伴なうことが必要であって，不整形などを利用して波面を変形することは効果のないことが観測されている．また多孔性物質内に音波が浸透する距離は（85）の λ'_x で与えられるから，自然波長 λ_0 の平方根に比列している．したがって多孔性物質の厚さが十分に厚くない場合には波長の長い低周波音は充分に減衰されない間に透過してしまい，多孔性物質の背面に剛壁でもある場合には，そこで反射されて再び戻ってくる．そのため多孔性物質はその厚さに比して長い波長を有する低周波音に対して充分な吸音を行わない場合が多いから注意すべきである．

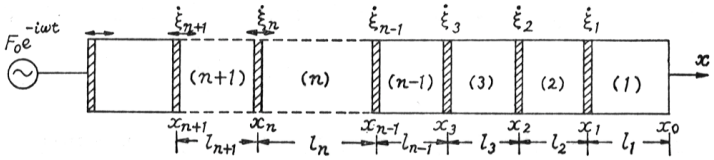
4・6・6　多層制動振動板による音波の吸収

音場内に置かれた軽い物体が入射音圧によって微小の振動をするために消費するエネルギー損失を利用して音波を吸収する方法がある．[1] この方法は内部摩擦が大きく密度の小さい多孔性物質の板[2]を何層か配置することによって，充分低周波音まで有効に減衰させることができるので，特に低音の

（8）　これらの結果は Lord RAYLEIGH によって完成された結果（1883）と一致する．
（9）　Lord RAYLEIGH によって行われた．
（10）　porous material
（11）　Philip M.MORSE and RICHARD M.BOLT : ”Souod Waves in Rooms” Rev. Mod. Phys., Vol. 16, No. 2, April 1944.
（1）　伊藤 ：”日本音響学会研究発表講演予稿 ” 昭和 28. 5, 3－3. 第10版にて理論的誘導方法を改訂した．
（2）　これを制動振動板と呼ぶことにする．

吸音には便利なものである．

吸音の機構を説明するのに便利な模型として第4・43図に示すように終端の閉鎖した管の中に n 層の制動振動板を空気層を介して配置したものを考え，左方から右方へ向って平面波が入射するものと仮定する．第 n 番目の振動板のある位置を x_n とし，その板の x 方向の振動速度の板面上の平均値と $\dot{\xi}_n$，x_n と x_{n-1} との間隔を l_n，その空間を (n) と表わし，第 n 空間内の x なる位置の音圧を $P_n(x)$ と記すことにすれば，第 $n+1$ 空間内の断面 x_{n+1} から $+x$ 方向を見た比音響インピーダンスは



第4・43図

(86)
$$Z_n^A(x_{n+1}) = \rho_0 c \,\mathrm{Tanh}\left[ik(x_{n+1}-x_n) + \mathrm{Tanh}^{-1}\left(\frac{Z_n^M + SZ_n^A(x_n)}{S\rho_0 c}\right)\right] \quad (\mathrm{Pa\cdot s/m}),$$

ただし

(87)
$$Sp_{n+1}(x_n) = \left\{Z_n^M + SZ_n^A(x_n)\right\}\dot{\xi}_n \quad (\mathrm{N}),$$

(88)
$$Z_n^M = R_n^M - i\left(\omega M_n - \frac{K_n}{\omega}\right) = R_n^M - iX_n^M \quad (\mathrm{N\cdot s/m}),$$

$l_n = x_{n-1} - x_n$ (m)，　$k = 2\pi/\lambda = \omega/c$ (rad/m)，

M_n ・・・第 n 番目の制動振動板の実効質量 (kg)，

K_n ・・・　〃　の実効スティフネス (N/m)，

R_n^M ・・・　〃　の実効機械抵抗 (N・s/m)，

S ・・・管の断面積（波長に比して充分に小さい） (m^2)

である．これより

(89)
$$Z^A_{n+1}(x_{n+1}) = \rho_0 c \frac{R_n - i(X_n + \rho_0 c \tan kl_{n+1})}{\rho_0 c - i(R_n - iX_n \tan kl_{n+1})} \quad (\mathrm{Pa\cdot s/m}),$$

ただし

$$R_n = \frac{R_n^M}{S} + R_n^A(x_n), \qquad X_n = \frac{X_n^M}{S} + X_n^A(x_n),$$

となる．

制動振動板がない場合の長さ l なる閉管の送端インピーダンスは

(90)
$$Z_c^A = i\rho_0 c \cot kl \quad (\mathrm{Pa\cdot s/m})$$

なる純弾性リアクタンスであり，また無限に長い管の送端インピーダンスは

(91)
$$Z_0^A = \rho_0 c \quad (\mathrm{Pa\cdot s/m})$$

なる純抵抗である．(86) または (89) が実数部を有することは，終端で閉鎖された管であるにもか

かわらずエネルギーが $+x$ 方向に流動することを意味し，x_{n+1} 断面の x 方向のエネルギー流密度は

(92)
$$\overline{w}_{n+1} = \frac{\left|\dot{\xi}_{n+1}\right|^2}{2} \frac{R_n(1+\tan^2 kl_{n+1})}{\left(1-\frac{X_n}{\rho_0 c}\tan kl_{n+1}\right)^2 + \left(\frac{R_n}{\rho_0 c}\tan kl_{n+1}\right)^2} \qquad (\mathrm{W/m^2})$$

である．よって，これだけのエネルギー流は制動振動板が振動するときにその機械抵抗 R_n^M によって消費されるものと考えられる．また送端インピーダンス（89）を無限長の管の状態に近付けるには，そのリアクタンス部分をなるべく小さくすればよい，そのためには，kl_n の小さい範囲では，M_n と K_n および l_n 等を適当に選んで合成のリアクタンスをなるべく小さくすればよい．

低周波音の場合には

(93)
$$\rho_0 c \cot kl_n \approx \frac{\rho_0 c\lambda}{2\pi l_n},$$

(94)
$$\tan kl_n \approx kl_n \approx \frac{2\pi l_n}{\lambda}$$

と表わせるから

(95)
$$Z^A_{n+1}(x_{n+1}) = R^A_{n+1}(x_{n+1}) - iX^A_{n+1}(x_{n+1}) \qquad (\mathrm{Pa\cdot s/m}),$$

(96)
$$R^A_{n+1}(x_{n+1}) = \frac{R_n\left[1+\left(\frac{2\pi l_{n+1}}{\lambda}\right)^2\right]}{\left(1-\frac{X_n}{\rho_0 c}\frac{2\pi l_{n+1}}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{R_n}{\rho_0 c}\frac{2\pi l_{n+1}}{\lambda}\right)^2},$$

$$X^A_{n+1}(x_{n+1}) = \frac{X_n\left[1-\left(\frac{2\pi l_{n+1}}{\lambda}\right)^2\right] + \rho_0 c\frac{2\pi l_{n+1}}{\lambda}\left[1-\left(\frac{R_n}{\rho_0 c}\right)^2-\left(\frac{X_n}{\rho_0 c}\right)^2\right]}{\left(1-\frac{X_n}{\rho_0 c}\frac{2\pi l_{n+1}}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{R_n}{\rho_0 c}\frac{2\pi l_{n+1}}{\lambda}\right)^2}.$$

制動板の間隔 l_n 等が波長 λ に比して充分に小さい場合には

(97)
$$\left(\frac{2\pi l_{n+1}}{\lambda}\right)^2 << 1$$

であるから，送端インピーダンスは

(98)
$$Z^A_{n+1}(x_{n+1}) \approx \frac{R_n - i\left\{X_n + \rho_0 c\frac{2\pi l_{n+1}}{\lambda}\left[1-\left(\frac{R_n}{\rho_0 c}\right)^2-\left(\frac{X_n}{\rho_0 c}\right)^2\right]\right.}{\left(1-\frac{X_n}{\rho_0 c}\frac{2\pi l_{n+1}}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{R_n}{\rho_0 c}\frac{2\pi l_{n+1}}{\lambda}\right)^2} \qquad (\mathrm{Pa\cdot s/m})$$

と表わされる．この結果は，制動振動板の層数 n を増加するにしたがって音響抵抗 R^A が増加し，かつ音響リアクタンス X^A が減少して行くことを示しているが，適当な層数を超過すると再び音響インピーダンスの増加を来すので，$X^A_{n+1}(x_{n+1})=0$ となる条件である $X_n=0$ に最も近付く状態となるように n を選ぶべきである．

$X_n=0$ の場合には

$$R^A_{n+1}(x_{n+1})\approx R_n\,,$$
$$X^A_{n+1}(x_{n+1})\approx \rho_0 c\,\frac{2\pi l_{n+1}}{\lambda}\left[1-\left(\frac{R_n}{\rho_0 c}\right)^2\right] \tag{99}$$

となる．

たとえば $l_1=l_2=\cdots=0.1(\mathrm{m})$，$R_n^M=10^2 S(\mathrm{N\cdot s/m})$，$M_n=1S(\mathrm{kg})$，$K_n=10^4 S(\mathrm{N/m})$，$\lambda=3.4(\mathrm{m})$ の場合には，$Z_0^M=0-i\infty$，$Z_0^A(x_0)=0-i\infty$ であるから

$$\begin{aligned}
Z_1^A(x_1)&=0+i\rho_0 c\,\lambda/2\pi l_1=+i2.32\times10^3=-iX_1^A(x_1)\,,\\
Z_2^A(x_2)&=33.3+i1000=\rho_0 c(0.077+i2.32)=R_2^A(x_2)-iX_2^A(x_2)\,,\\
Z_3^A(x_3)&=98+i279=\rho_0 c(0.227+i0.65)\,,\\
Z_4^A(x_4)&=273-i468=\rho_0 c(0.835-i1.08)\,,\\
Z_5^A(x_5)&=1215-i1690=\rho_0 c(2.83-i3.93)\,,\\
Z_6^A(x_6)&=2430-i0=\rho_0 c(5.65-i0)\,,\\
Z_7^A(x_7)&=1465+i1285=\rho_0 c(3.41+i3.0)
\end{aligned}$$

となるから，無限長の管に近い状態は $n=4$ のあたりと考えられる．

4・7　有限振幅音波 (1)

いままで述べてきた理論はすべて微小な振幅の音波に対してのみ適用でき，振幅が $\dfrac{2\pi}{\lambda}$ に比して無視できぬ程度に大きくなる場合には出発点から考えを改めねばならぬ．

3・2 の (3) より凝縮 s，膨張 Δ の間には

$$(1+s)(1+\Delta)=1,\qquad s+\Delta+s\Delta=0 \tag{1}$$

なる関係があり，x 方向に進む平面波の変位 ξ と Δ との間には

$$\Delta=\frac{\partial\xi}{\partial x} \tag{2}$$

なる関係がある．したがって流体の微小部分の運動の方程式は 3・2 の (10) より

(1)　waves of finite amplitude, 詳しくはLAMB：”Dynamical Theory of Sound”Chap.VI を参照のこと．

（3）
$$\rho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=-\frac{\partial p}{\partial x}$$

と表わせるが，この場合の流体の密度の瞬時値は ρ_0 とみなすことはできず

（4）
$$\rho=\frac{\rho_0}{1+\Delta}=\frac{\rho_0}{\left(1+\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\right)}$$

である．もしも断熱変化であるとすれば

（5）
$$\frac{p}{p_0}=\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}=\frac{1}{\left(1+\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\right)^{\gamma}},$$

よって

（6）
$$p=\frac{p_0}{\left(1+\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\right)^{\gamma}}$$

となり（3）の右辺は

（7）
$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{p_0\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2}}{\left(1+\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\right)^{\gamma+1}}$$

となる．したがって（3）は

（8）
$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=c^2\frac{\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2}}{\left(1+\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\right)^{\gamma+1}},\qquad c=\sqrt{\gamma p_0/\rho_0}\ .$$

また等温変化の場合には

（9）
$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\frac{c^2\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2}}{\left(1+\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\right)^{2}}$$

である．

振幅の大きな音波の性質を調べるために，まず等温変化の仮定の下に成立する（9）を解いて見よう．それには

（10）
$$\frac{\partial\xi}{\partial t}=f\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)$$

とおいて（9）に代入すると解の形は

（11）
$$\frac{d\xi}{dt}=f\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)=\pm c\ln\left(1+\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)$$

であればよいことが知られる．[2] これは（1）を用いて

（2）　$\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=f'\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\right)\cdot\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x\partial t}$，$\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x\partial t}=f'\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\right)\cdot\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$ であるから

$\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\left\{f'\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\right)\right\}^2\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$ となり，（9）は $f'\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\right)=\pm c/\left(1+\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\right)$，

よって（11）を得る．

(12)　$$\dot{\xi} = \mp c \ln(1+s),$$

または

(13)　$$\frac{\rho}{\rho_0} = e^{\mp\dot{\xi}/c}$$

と表わされる．この結果は s を無限小と仮定すると（12）が $\dot{\xi} = \mp cs$ となり，3・2・4の結果と一致する．

有限振幅音波の伝播速度を求めるために,特定な値の凝縮 s が伝播する速度を見出してみよう．t なる時刻に x の位置の粒子が持っていた $\frac{\partial\xi}{\partial x}$ なる膨脹率は，$t+\delta t$ なる時刻には $x+\delta x$ の位置の粒子に移動していると考えられるから，s が一定なる面は

(14)　$$\delta s = \delta\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right) = 0$$

で特長づけられる．これは

(15)　$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial t}\delta t + \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\delta x = 0$$

と表わされ，容易に

(16)　$$\delta x \pm c(1+s)\delta t = 0,$$

または

(17)　$$\frac{dx}{dt} = \pm c(1+s) \qquad (\mathrm{m/s})$$

を得る．[3]　（17）は s の値の一定な平面の伝播する速度を静止している媒体から見た値であって凝縮 s の大きな所ほど伝播速度が大きいことを示している．

空間内の伝播速度の分布を知るためには（$x+\xi$）の全微分を求める必要があり，

(18)　$$\delta(x+\xi) = \left(1+\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)\delta x + \frac{\partial\xi}{\partial t}\delta t = 0$$

より伝播速度を求めると

(19)　$$v = \left(1+\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\xi}{\partial t}$$

となるが，これに（17）を用いると

(20)　$$v = \mp c + \frac{\partial\xi}{\partial t} \qquad (\mathrm{m/s})$$

となる．これらの結果は下号が $+x$ 方向へ伝播する音波を表わしていて，伝播速度は粒子速度 ξ の大きな場所ほど大きくなることが示されている．よって任意の波形は振幅の大きな部分ほど遠く伝播するので伝播する途中で次第に変形し，波形の前面の傾斜が次第に急峻になり，後面の傾斜はゆるやかになる．これは海岸に寄せてくる波の波頭が次第に尖形をなすことと同じ現象である．しかし波頭面の

（3）　脚注（2）の関係式を用いる．

傾斜が次第に大になって遂に無限大になった後は，ここで述べる理論で扱う範囲外の問題となる．

断熱変化の仮定の場合にも同様のことが示され，(12) に相当する式は

(21)
$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \pm \frac{2c}{\gamma - 1}\left\{1 - \sqrt{(1\,s)^{(\gamma-1)}}\right\},$$

凝縮 s の一定な面が伝播する速度を静止媒体から見た場合には

(22)
$$\frac{dx}{dt} = \mp c\,(1+s)^{\frac{\gamma+1}{2}} \qquad (\mathrm{m/s}),$$

伝播速度の空間分布は

(23)
$$v = \mp\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\partial \xi}{\partial t} \qquad (\mathrm{m/s})$$

である．

有限振幅音波の波動方程式 (8) または (9) は非線型微分方程式 [4] であるために，線型微分方程式のように，幾つかの解を重畳して一般解を構成することはできない．例えば $+x$ 方向へ伝播する波動を表わす解と $-x$ 方向へ伝播する波動を表わす解を線型結合して解を構成することができない．しかし RIEMANN [5] (1860) の研究の結果によれば，一定の場所に局限して分布している初期擾乱が有限振幅の場合にも $+x$ 方向および $-x$ 方向に分裂して伝播し得ることが確かめられている．

なにかの方法で発生した有限振幅音波が消滅するまでの経過を正確に知ることは困難である．振幅の大きな音波の場合には，空気の粘性や熱損失の影響が特に大きく作用するので，これらの影響をも考慮しないとその性質を充分に究明することができない．これらの問題については RAYLEIGH [6] がかなり詳細に論じている．

非線型運動の二三の特長を示すために有限振幅音波の振動波形について述べておく．いま $x=0$ の平面上で

(24)
$$\xi = f(t)$$

なる振動が与えられたとすると，ξ の微係数の三次の項を省略すれば，(8) は

(25)
$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - (\gamma+1)c^2 \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

と表わされるが，(25) の最後の項を無視するとその解は

(26)
$$\xi = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

となる．(26) は (8) の第一近似解である．よってこれを (25) の微小項に代入すると

(27)
$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{2}(\gamma+1)\frac{\partial}{\partial x}\left\{f'\left(t - \frac{x}{c}\right)\right\}^2$$

---

(4)　nonlinear diff. eq.

(5)　Berhard RIEMANN : (1826-66) ; Gottingen の数学教授 (1857-66) .

(6)　RAYLEIGH : "Theory of Sound ".

となるから，(26) と共に成立する (27) の解は

(28)
$$\xi = f\left(t-\frac{x}{c}\right)+\frac{\gamma+1}{4c^2}x\left\{f'\left(t-\frac{x}{c}\right)\right\}^2$$

となる．これを見ると，有限振幅音波と微小振幅音波との差異を示す第一近似値は x に比例し，且つ音源の振動速度と音の伝播速度との比の平方に比例している．この速度の比は非常に小さい値であるが，伝播距離が大きくなるにしたがって，その効果が現われてきて，遂には，ここで無視した第三次の微小量の影響までも無視できないようになる．なお (28) の結果は AIRY [7] (1845) が潮汐の動力学的理論の研究に用いた方法であり，これと似た現象が浅い海の潮汐現象にも見られる．

音波の振動が単弦振動波形の場合には

(29)
$$f(t)=f_0\cos\omega t$$

とおくと (28) は

(30)
$$\xi = f_0\cos\omega\left(t-\frac{\omega}{c}\right)+\frac{(\gamma+1)\omega^2 f_0^{\,2}}{8c^2}x\left\{1-\cos 2\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right\}$$

となり，音場内の粒子の変位は 2ω なる倍音を含んだ波形となって，もはや単弦振動波形ではなくなる．このような波形を非直線性に基づく高調波ヒズミを含んだ波形と呼ぶ．また音源の波形が二つの周波数成分を含有する場合には更らに興味ある現象が現われる．いま

(31)
$$f(t)=f_1\cos\omega_1 t+f_2\cos\omega_2 t$$

とおくと，(28) は

(32)
$$\begin{aligned}\xi = {} & f_1\cos\omega_1\left(t-\frac{x}{c}\right)+f_2\cos\omega_2\left(t-\frac{x}{c}\right)\\ & +\frac{\gamma+1}{8c^2}x\Big[\omega_1^2 f_1^{\,2}+\omega_2^2 f_2^{\,2}-\omega_1^2 f_1^{\,2}\cos 2\omega_1\left(t-\frac{x}{c}\right)\\ & -\omega_2^2 f_2^{\,2}\cos 2\omega_2\left(t-\frac{x}{c}\right)\\ & +2\omega_1\omega_2 f_1 f_2\cos\left\{(\omega_1-\omega_2)\left(t-\frac{x}{c}\right)\right\}\\ & -2\omega_1\omega_2 f_1 f_2\cos\left\{(\omega_1+\omega_2)\left(t-\frac{x}{c}\right)\right\}\Big]\end{aligned}$$

となる．この結果を見ると，$2\omega_1$ および $2\omega_2$ なら倍音成分の他に $(\omega_1-\omega_2)$ なる差音 [8] の周波数成分および $(\omega_1+\omega_2)$ なる和音 [9] の周波数成分も現われることが示されている．これらの項は非直線性に基づく混変調ヒズミ [10] と呼ばれている．また差音および和音を一括して結合音 [11] と呼ぶ．これらの高調波ひずみおよび混変調ひずみの現われることは非線型振動の特長であって，現今では非直線性の表示に高調波ヒズミ率 [12] および混変調ヒズミ率を用いるようになってきた．

---

(7)　Sir George Biddell AIRY (1801－92) : Cambridge の天文学教授．(26) から (28) を求める方法は繰返し近似法である (successive approximation).

(8)　difference tone, SORGE (1745), TARTINI (1754)が発見した.

(9)　summation tone, RUCKER と EDSER (1895)が観測により実証した. Phil.Mag. (5) ,Vol.xxxIX.

(10)　inter-moduration distortion または cross-moduration distortion.

(11)　combination tone　　(12)　harmonic distortion

4・8　風の影響・温度の影響

4・8・1　風の影響

風が音波におよぼす影響は，$U(\mathrm{m/sec})$ なる速度で流動する媒質内の音波の伝播を扱うことによって知ることができる．風速 U は至る所一様なものとし，渦なしであると仮定し，U の方向を x 軸に取る．この気体の速度ポテンシャル ϕ' を

（1）　$$\phi' = \phi - Ux$$

とおけば，(1) は流体の運動方程式を満足せねばならぬから音場の速度ポテンシャル ϕ の満足すべき方程式は

（2）　$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + 2U\frac{\partial^2\phi}{\partial t\,\partial x} + U^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = c_0\nabla^2\phi$$

となる．いま c_0 を音速とし

（3）　$$c_1 = U + c_0\,,\qquad c_2 = c_0 - U\,,$$

（4）　$$x - c_1 t = \xi\,,\qquad x + c_2 t = \eta$$

とおくと

（5）　$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi\,\partial\eta} = 0$$

となり，(2) の解は

（6）　$$\phi = f(x - c_1 t) + g(x + c_2 t)$$

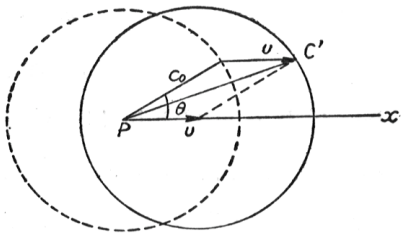
となる．よって x 方向に進む音波の見掛の音速は $c_0 + U$ または $c_0 - U$ であることが分る．また風の方向と，θ なる角をなす方向へ進む音波の見掛の音速は

（7）　$$c' = c_0 + U\cos\theta$$

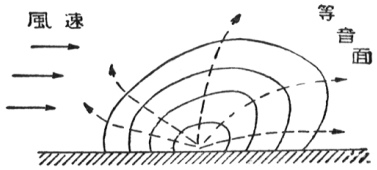
であり（第4・44図），この場合の音場は

（8）　$$\phi = Ae^{-i\omega\{t-(x\cos\theta + y\sin\theta)/c'\}}$$

である．[1]



第4・44図



第4・45図

風速が場所によって異なる場合には簡単に解けぬが，地表から上空に行くにしたがって風速の大きくなる場合には風上に向う音の伝播方向は上向に彎曲し，風下に向う音の伝播方向は下方に彎曲する（第4・45図）．

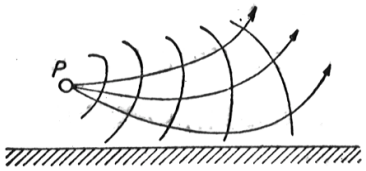
4・8・2　温度の影響

大気の温度による音の伝播速度の変化は，3・2 で述べた通り

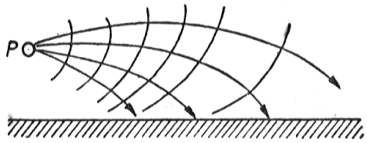
（1）　阪井（卓三）： Geophys. Mag. Tokyo, Vol.8, p.205, (1934).
数物記事, Vol.17, p.340 (1935).
J.D.TRIMMER : J.A.S.A., Vol.9, p.162, (1937).

(9)　$c=\sqrt{\gamma R\theta}$,　$R=$ 気体恒数,　$\gamma=1.41$

で表わされる．よって地表に比べて上層が低温である場合には音波の伝播速度は下層ほど大きくなるので，波面の伝播方向は第4・46図のように上方に凹となる．そのため地表附近では遠方に音が到達しない．上層が高温の場合はその逆となり，第4・47図のように音の波面は下方に彎曲する．よって地表面には遠方の音が到達し得る．



第4・46図　上層低温.



第4・47図　上層高温.

4・8・3　層状に温度勾配のある大気中の音波の通路

地面や海面の近傍にある大気は，その境界面からの距離にしたがって温度が変化している場合が多い．このような大気内を音波が通過する際には当然その通路が彎曲する．温度変化が高さのみの函数で与えられるような単純な場合について，音波の通路の形を求めることは比較的簡単であり，その結果を用いて温度変化の影響を広く類推することもできる．

温度 θ(°K) なる気体内の音波の速度は (9) で与えられるから

(10)　$\Delta\theta=\theta-\theta_0$ (°C),　$\theta_0=273.15$ K

とおけば

(11)　$c=c_0\sqrt{1+\Delta\theta/\theta_0}$,

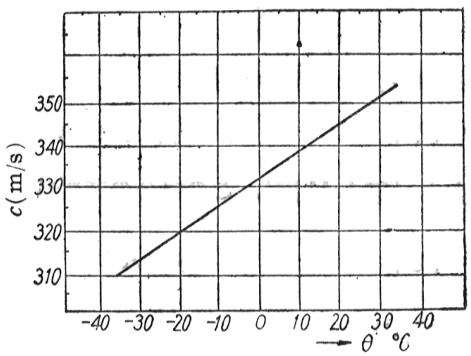
$c_0=\sqrt{\gamma R\theta_0}=332$　(m/s)（大気）

であり，$\Delta\theta$ を -30 °Cより $+30$ °Cまで変化すると，c は第 4・48図のようになる．

地表面に沿う水平距離を x，垂直方向の高さを z とし，温度の高さについて $\theta(z)$(K) なる形で変化しているときに，xz 平面内の音波の通路を求めてみよう．任意の高さの位置の音の伝播速度は

(12)　$v=\sqrt{\dfrac{\gamma p}{\rho_0}}=\sqrt{\gamma R\theta(z)\dfrac{\rho}{\rho_0}}=\sqrt{\gamma R\theta(z)}$

(m/s),



第4・48図　音速の温度による変化.

音波の通路を

(13)　$z=f(x)$,

この通路に沿う微小線分の長さを

(14)　$ds=\sqrt{1+\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2}\,dx$

とするとき，音源位置 (x_1, h) から受音点 (x_2, z) に音が到達するのに必要な時間は

(15)　$t=\displaystyle\int_{x_1}^{x_2}\frac{ds}{v}=\frac{1}{\sqrt{\gamma R}}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{\frac{1+z'^2}{\theta(z)}}\,dx$　(s)

ただし

$$z' = \frac{\partial z}{\partial x}$$

である．FERMAT の原理によれば，$f(x)$ が音波の通路であるためには（15）の変分 δt が消滅せねばならぬ．したがって

(16)
$$F(z, z') = \left[\frac{(1+z'^2)}{\theta(z)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

とおくとき，$F(z, z')$ は

(17)
$$\delta\int_{x_1}^{x_2} F(z, z')\,dx = 0$$

または

(18)
$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z'} - \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial z'} z' - \frac{\partial' F}{\partial z'^2} z'' = 0$$

を満足せねばならぬ．[1]（18）に（16）を代入すると

(19)
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{\theta(z)}\frac{\partial \theta}{\partial z}\left\{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right\} = 0$$

となる．$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 << 1$ の場合には

(20)
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{d}{dz}\left\{\ln\theta(z)\right\} = 0$$

を解いて通路の形　$z = f(x)$　を決定することができ，解は

(21)
$$x + B = \int \frac{dz}{\sqrt{A - \ln\theta(z)}} \qquad (A, B \text{ は積分定数})$$

で与えられる．ただし（21）を（13）の形に変形するのは困難な場合が多い．

温度函数 $\theta(z)$ が単純な形の場合には（21）を用いずに直接（20）から（13）の形の解を求めることができる．その二三の例を次に示しておく．

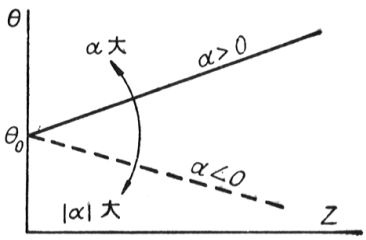
【例 1】 温度変化の無い場合 ：$\theta(z) =$ 一定，$d\theta(z)/dz = 0$．

このときは（20）の解は

(22)
$$z = f(x) = Ax + B$$

なる直線となり，(x_1, h) と(x_2, z) の２点を通る通路は

(23)
$$z = \frac{z-h}{x_2 - x_1}(x - x_1) + h.$$



第4・49図　$\theta = \theta_0 + \alpha z$．

【例 2】 温度勾配の形が第４・49図のように

(24)
$$\theta = \theta_0 + \alpha z \qquad (\mathrm{K})$$

（1） WILSON ： ” Advanced Calculus ” Ginn & Co. 1912. これを変分法という．

なる一次函数で与えられる場合には（24）は

(25)
$$\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{1}{2}\frac{\alpha}{\theta_0+\alpha z}=0$$

となるが，普通には $\alpha z \ll \theta_0$ とみなすことができるので（25）は

(26)
$$\frac{d^2z}{dx^2}+\beta(b-1)=0,$$
$$\beta=-\frac{\alpha}{2\theta_0},$$
$$b=\frac{\alpha}{\theta_0}$$

となり，この解は

(27)
$$z=\frac{\theta_0}{\alpha}+\left(A-\frac{\theta_0}{\alpha}\right)\mathrm{Cosh}\left(\frac{\alpha}{\theta}\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+B\frac{\sqrt{2}\,\theta_0}{\alpha}\mathrm{Sinh}\left(\frac{\alpha}{\theta_0}\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right),$$

AB は積分定数，$\alpha>0$ のとき上空高温，
$\alpha<0$ のとき上空低温．

【例3】 温度勾配が第4・50図のように

(28)
$$\theta=\theta_1+(\theta_0-\theta_1)e^{-\alpha z}$$
$\theta_1>\theta_0$ ・・・上空高温，
$\theta_1<\theta_0$ ・・・上空低温．

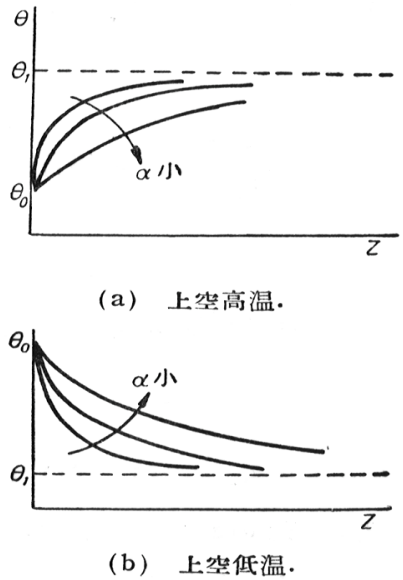
で与えられる場合には，(20) は

(29)
$$\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{\alpha}{2}\left[1+\frac{1}{\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}-1\right)e^{-\alpha z}}\right]^{-1}=0$$

となるが，通常の場合は

$$\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}-1\right)e^{-\alpha z}\ll 1$$

であるから二項定理で展開して



第4・50図　$\theta=\theta_1+(\theta_0-\theta_1)e^{-\alpha z}$.

(30)
$$\frac{d^2z}{dx^2}-\beta e^{-\alpha z}=0,$$

ここに
$$\beta=\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}-1\right)\begin{cases}>0 & \text{・・・上空低温}\\ <0 & \text{・・・上空高温}\end{cases}$$

を用いて十分である．(30) の一般解は

(31)
$$x=-B-\frac{1}{\alpha\sqrt{A}}\ln\left[\frac{\sqrt{A+2Be^{-\alpha x}}-\sqrt{A}}{\sqrt{A+2Be^{-\alpha z}}+\sqrt{A}}\right]$$

である．(31) の AB を境界条件から定めることは困難な場合が多い．もしも αz が小さい場合には（31）を用いずに

(32)
$$e^{-\alpha z} = 1 - \alpha z + \frac{1}{2}\alpha^2 z^2$$

を用いて（20）の解を求めることができる．（32）の第一項のみで十分の場合には（20）の形およびその解は

(33)
$$\frac{d^2 z}{d x^2} - B = 0, \qquad z = \frac{1}{2}\beta x^2 + Ax + B$$

となり放物線形の通路となる．（32）の第二項まで取る場合には（20）は

(34)
$$\frac{d^2 z}{d x^2} + \beta(\alpha^2 - 1) = 0,$$

その解は β が正の場合と負の場合とで形を異にし，それぞれ

(35)
$$z = \frac{1}{\alpha} + \left(A - \frac{1}{\alpha}\right)\cos\sqrt{\beta\alpha}\,x + \frac{B}{\sqrt{\beta\alpha}}\sin\sqrt{\beta\alpha}\,x \qquad (\beta > 0),$$

(36)
$$z = \frac{1}{\alpha} + \left(A - \frac{1}{\alpha}\right)\mathrm{Cosh}\sqrt{|\beta|\alpha}\,x + \frac{B}{\sqrt{|\beta|\alpha}}\mathrm{Sinh}\sqrt{|\beta|\alpha}\,x \qquad (\beta < 0)$$

となる．

音源位置（$0, h$）と受音点（x_1, z_1）を通る通路の形を（33）について求めると

(37)
$$z = h + \frac{z_1 - h - \frac{1}{2}\beta x_1^2}{x_1}x + \frac{1}{2}\beta x^2$$

となり，直線（23）との差が最も大きくなる点は $\frac{x_1}{2}$ の位置であり，その値は $-\beta x_1^2/8$ である．たとえば上空が高温で $\theta_0 = 273\,\mathrm{K}$，$\theta = 278\,\mathrm{K}$，$\alpha = 1$ の場合には $\beta = 0.009$ であるから，$x_1 = 50\,(\mathrm{m})$ の距離を伝播する音は $x_1 = 25\,(\mathrm{m})$ の地点で直線通路より上方に 2.81 (m) だけずれていることになる．

（35）について A B を決定すると

(38)
$$z = \frac{1}{\alpha} + \left(h - \frac{1}{\alpha}\right)\cos\sqrt{\beta\alpha}\,x - \frac{\alpha z_1 + (1 - \alpha h)\cos\sqrt{\beta\alpha}\,x_1 - 1}{\alpha\sin\sqrt{\beta\alpha}\,x_1}\cdot\sin\sqrt{\beta\alpha}\,x$$

となり（37）よりも彎曲の甚だしい通路を表わす．（36）についても全く同様の形を得る．

これらの結果より上空が高温のときは，音の通路は直線距離よりも上方に移動し，上空が低音の場合には下方に移動すること，およびその移動する距離は想像以上に大きいものであることが示されている．

４・９　音源および受音点の移動・DOPPLER 効果

一定の振動数の音を発射しながら移動する音波の周囲でこの音を聞くときには，音源が接近してくる場合には振動数が上昇して聞え，音源が遠去かる場合には振動数が低下して聞える．その理由は，音源の進行する方向に対して音波が１秒間に進む距離は $c\,(\mathrm{m})$ であるが，音源が１秒間に進む距離は $U_0\,(\mathrm{m})$ であるから，音源から１秒間に発射される波の数 ν_0 は $c - U_0$ なる距離の間に分布するこ

とになる．よって音源の進行方向における音波の波長は

（1）　$$\lambda' = \frac{c-U_0}{v_0} \qquad (\mathrm{m})$$

となる．この波長の音波が静止している聴者に到達したときの振動数は

（2）　$$v' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{c v_0}{c-U_0} \qquad (\mathrm{Hz})$$

となる．

よって第4・51図のように v_0 なる振動数の音を発する音源が観測者の方に向って U_0 なる速度で近付いてくるときに観測者が聞く音の見掛けの振動数 v は

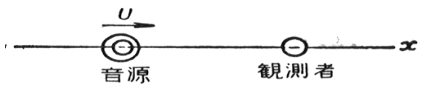
（3）　$$\frac{v}{v_0} = \frac{c}{c-U_0}$$

である．次に第4・52図のように音源が静止し，観測者が v なる速度で音源から遠去かる場合には，音源の周囲の空間内の音の波長は

（4）　$$\lambda_0 = \frac{c}{v_0}$$

であるが，観測者が1秒間に受ける波数は $c-v$ なる距離の中の音波に相当するので

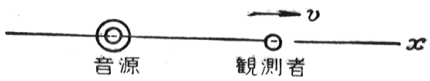
（5）　$$v' = \frac{c-v}{\lambda_0} = \frac{(c-v)}{c} v_0$$



第4・51図

となり，v' は移動する観測者の見掛けの振動数である．よって

（6）　$$\frac{v'}{v_0} = \frac{c-v_0}{c},$$

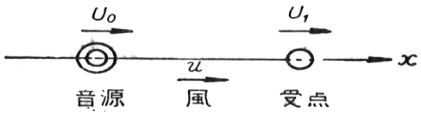


第4・52図

すなわち音の高さは音源と観測者とが近づく場合は高く聞え遠去かる場合は低く聞える．これを DOPPLER 効果という．[1]

第4・53図のように音源，観測者が共に x 軸上をそれぞれ U_0, U_1 の速度で運動し，さらに風が x 方向に u なる速度で吹いているときは

（7）　$$\frac{v}{v_0} = \frac{u+c-U_0}{u+c-U_1}$$



第4・53図

となる．[2] また音源，観測者，風が任意の方向に移動する場合にそれぞれの速度成分を u_0, v_0, w_0, u_1, v_1, w_1, u, v, w, とすると

（8）　$$\frac{v}{v_0} = \frac{u\sqrt{c^2-v^2-w^2}+c-v^2-w^2-\sqrt{c^2-v^2-w^2}\,u_1+vv_1+ww_1}{u\sqrt{c^2-v^2-w^2}+c^2-v^2-w^2-\sqrt{c^2-v^2-w^2}\,u_0+vv_0+ww_0}$$

となる．ただし音源と観測者とを結ぶ線を x 軸とし風速は一様であるものとする．[3]

（1）　DOPPLER (1842) が二重星からくる光の色の変化を説明するために提唱した理論である．
（2）　MOESSARD (1892)
（3）　H.BATEMAN ： J.A.S.A., Vol.2, p. 468 (1931).
　　R.W.YOUNG ： J.A.S.A., Vol.6, p.112 (1934).